ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, Th. v. KÁRMÁN-Aachen, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg, R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 11 :: Seite 165 bis 252

:: Heft 3 :: Juni 1931

INHALT:



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Bezugsbedingungen und Anzeigenpreise auf der 3. Umschlagseite.

Z. f. ang. Mathem. u. Mech. / Berlin, Mai/Juni 1931 / Bd. 11 / Heft 3, Seite 165—252.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 11 Juni 1931 Heft 3

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Biegung zusammengesetzter Stäbe mit besonderer Rücksicht auf Stoßverbindung von Eisenbahnschienen.

Von *Akimasa Ono*, Fukuoka (Japan).

Die Stoßverbindung der Eisenbahnschiene als ein Gegenstand der Elastizitätsberechnung scheint nicht viel untersucht worden zu sein. Die Berechnungsmethode, die man Zimmermann verdankt[1]) und die heute noch gebräuchlich sein soll[2]), ist auf einer Annahme begründet, nach welcher die Laschendrücke nur an den Enden der Schienen und Laschen angreifen. Diese Annahme kann natürlich als zutreffend nicht bezeichnet werden. Eine andere und vielleicht bessere Annahme ist, wie der erstgenannte Autor (a. a. O.) auch andeutungsweise bemerkt, daß die von der Last herrührende Spannung auf der Anlagefläche der Relativverschiebung der Lasche gegen Schiene proportional ist. Diese Annahme soll im folgenden genauer gefaßt und die Statik elastisch verbundener Schienen in Anwendung der allgemeinen Gleichungen der Biegung zweier zusammengesetzter Stäbe, die anfänglich fest miteinander verbunden sind, behandelt werden. Auf der Anlagefläche wirkt also Anfangsspannung, und falls diese Spannung groß genug ist, kann die Lastspannung positiv oder negativ sein.

Abb. 1.

1. Biegung verbundener Stäbe.

Wir denken uns zwei gerade Stäbe, welche miteinander so verbunden sind, daß die Stabachsen ursprünglich in einer Linie liegen. Diese Linie nehmen wir als die Achse von x, Abb. 1.

Wenn Biegung auftritt, dann sind die Durchbiegungen der beiden Stabachsen im allgemeinen verschieden, nämlich y_1 und y_2, und die Stäbe üben eine Art der Kraftwirkung gegeneinander; die Intensität derselben pro Längeneinheit wird so angenommen, daß

$$\mu = K_1 (y_1 - y_2) \quad \quad (1),$$

worin K_1 eine positive von x unabhängige Konstante ist.

Ist μ positiv, so ist die Kraft, die auf den ersten Stab (Durchbiegung y_1) wirkt, nach oben gerichtet, während diejenige, die auf den zweiten Stab (Durchbiegung y_2) wirkt, nach

[1]) Die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues, 1888.
[2]) R. Otzen, Handbibliothek für Bauingenieure. Teil II, Band 4, 1927

unten gerichtet ist. Wirkt keine äußere Kraft auf die Stäbe in einer Strecke von x, so gelten die Differentialgleichungen der elastischen Linien.

$$E_1 J_1 \frac{d^4 y_1}{d x^4} = -\mu, \quad E_2 J_2 \frac{d^4 y_2}{d x^4} = \mu \quad \ldots \quad (2).$$

Aus (1) und (2) folgt mit $\eta = y_1 - y_2$,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^4 \eta}{d x^4} = -4 a^4 \eta, \\ \text{wobei} \quad & a = \sqrt[4]{\frac{K_1}{4}\left(\frac{1}{E_1 J_1} + \frac{1}{E_2 J_2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Mit Hilfe der vollständigen Lösung von (3), nämlich:

$$\eta = e^{ax}(A \cos a x + B \sin a x) + e^{-ax}(C \cos a x + D \sin a x) \quad \ldots \quad (4),$$

erhalten wir mit

$$\left.\begin{aligned} &n_1 = \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2}; \quad n_2 = \frac{E_1 J_1}{E_1 J_1 + E_2 J_2} \\ \text{und} \quad & f(x) = \frac{c_1}{6} x^3 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_3 x + c_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

die Lösungen

$$y_1 = n_1 \eta + f(x), \quad y_2 = -n_2 \eta + f(x) \quad \ldots \quad (6).$$

Um die acht Konstanten A, B, C, D und c_1, c_2, c_3, c_4 zu bestimmen, haben wir die Randbedingungen zu beachten. Es mögen M bzw. S im allgemeinen das Biegungsmoment und die Schubkraft bezeichnen, und insbesondere an den Enden nach dem folgenden Schema:

	$x = 0$	$x = a$
Stab Nr. 1	M_a, S_a	M_c, S_c
Stab Nr. 2	M_d, S_d	M_b, S_b

Da keine äußeren Kräfte zwischen den beiden Punkten wirken, gilt:

$$\left.\begin{aligned} M_a + M_d + (S_a + S_d)\, a &= M_b + M_c \\ S_a + S_d &= S_b + S_c \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7).$$

Die Randbedingungen sind nun wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} &x = 0;\ y_1 = y_a,\ \frac{d y_1}{d x} = \varphi,\ \frac{d^2 y_1}{d x^2} = -\frac{M_a}{E_1 J_1},\ \frac{d^3 y_1}{d x^3} = -\frac{S_a}{E_1 J_1},\ \frac{d^2 y_2}{d x^2} = -\frac{M_d}{E_2 J_2},\ \frac{d^3 y_2}{d x^3} = -\frac{S_d}{E_2 J_2} \\ &x = a;\ \frac{d^2 y_2}{d x^2} = -\frac{M_b}{E_2 J_2},\ \frac{d^3 y_2}{d x^3} = -\frac{S_b}{E_2 J_2} \end{aligned}\right\} \quad (8).$$

Aus der ersten Gruppe der Bedingungen an der Stelle $x = 0$ folgen

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -2 n_1 a^3 (-A + B + C + D) - \frac{S_a}{E_1 J_1} = 2 n_2 a^3 (-A + B + C + D) - \frac{S_d}{E_2 J_2} \\ c_2 &= -2 n_1 a^2 (B - D) - \frac{M_a}{E_1 J_1} = 2 n_2 a^2 (B - D) - \frac{M_d}{E_2 J_2} \\ c_3 &= \varphi - n_1 a (A + B - C + D) \\ c_4 &= y_a - n_1 (A + C) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9).$$

Die Gleichungen für c_1 bzw. c_2 lassen sich folgendermaßen vereinigen:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -\frac{S_a + S_d}{E_1 J_1 + E_2 J_2} \\ c_2 &= -\frac{M_a + M_d}{E_1 J_1 + E_2 J_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10).$$

Ferner haben wir aus der zweiten Gruppe der Bedingungen an der Stelle $x = a$ zwei Gleichungen, welche zusammen mit zwei anderen Gleichungen aus der ersten Gruppe die folgenden Gleichungen für A, B, C, D ergeben:

$$\left.\begin{array}{llll} & B & & -D = G_1 \\ -A & +B & +C & +D = G_2 \\ -e^z \sin z\, A & +e^z \cos z\, B & +e^{-z} \sin z\, C & -e^{-z} \cos z\, D = G_3 \\ -e^z(\cos z + \sin z)\, A & +e^z(\cos z - \sin z)\, B & +e^{-z}(\cos z - \sin z)\, C & +e^{-z}(\cos z + \sin z)\, D = G_4 \end{array}\right\} \quad (11),$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} z = a\,a \text{ und } G_1 &= \frac{M_d}{2\,a^2 E_2 J_2} - \frac{M_a}{2\,a^2 E_1 J_1} \\ G_2 &= \frac{S_d}{2\,a^3 E_2 J_2} - \frac{S_a}{2\,a^3 E_1 J_1} \\ G_3 &= \frac{M_b}{2\,a^2 E_2 J_2} - \frac{M_c}{2\,a^2 E_1 J_1} \\ G_4 &= \frac{S_b}{2\,a^3 E_2 J_2} - \frac{S_c}{2\,a^3 E_1 J_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Aus (11) erhalten wir für A und B

$$\left.\begin{aligned} A = \frac{1}{\Delta} \{ & G_1 [\cosh 2z - \sinh 2z - \cos 2z - \sin 2z] \\ & - G_2 [\cosh 2z - \sinh 2z - 1 + \sin 2z] \\ & + 2\,G_3 [\sinh z (\cos z - \sin z) + \sin z (\cosh z - \sinh z)] \\ & - 2\,G_4 [\sinh z (\cos z + \sin z) - \cosh z \sin z] \} \\ B = \frac{1}{\Delta} \{ & G_1 [\cosh 2z - \sinh 2z + \cos 2z - \sin 2z - 2] \\ & - G_2 [1 - \cos 2z] \\ & + 2\,G_3 [\cosh z \sin z + \sinh z \cos z] \\ & - 2\,G_4 \sinh z \sin z \} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13),$$

mit

$$\Delta = 4(\sinh^2 z - \sin^2 z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Dann folgen die Ausdrücke für C und D, nämlich

$$\left.\begin{aligned} C &= A - 2\,B + G_1 + G_2 \\ D &= B - G_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15),$$

mithin auch aus (9)

$$\left.\begin{aligned} c_3 &= \varphi - n_1\, a\, (4\,B - 2\,G_1 - G_2) \\ c_4 &= y_a - n_1 (2\,A - 2\,B + G_1 + G_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

Wenn insbesondere z groß genug ist, so wird e^{-z} klein, und wir können näherungsweise schreiben

$$\left.\begin{aligned} A\,e^z &= G_3 (\cos z - \sin z) - G_4 \cos z \\ B\,e^z &= G_3 (\cos z + \sin z) - G_4 \sin z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

und

$$C = G_1 + G_2, \quad D = -G_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18).$$

2. Anwendung auf die Schienenverbindung.

Um die vorstehende Berechnung auf die Stoßverbindung von Schienen anzuwenden, nehmen wir denjenigen Teil des Schienenstranges, welcher mit den Laschenplatten versehen ist, und legen diesen zusammengesetzten Stab auf zwei Stützlager von der Spannweite l mit der Verbindungsstelle in der Mitte, Abb. 2. Die Schiene gilt hier als der Stab Nr. 1, während die Laschenplatten die Rolle des Stabes Nr. 2 spielen.

Wirkt eine Belastung P auf den Stab symmetrisch in der Mitte, d. h. $\frac{P}{2}$ auf das Ende jeder Schiene, so können wir setzen $S_b = M_c = M_d = S_d = 0$, Abb. 3, wobei der Anfangspunkt $x = 0$ an einem Ende der Laschenplatte genommen wird, und die Mitte der Platte dem Orte $x = a$ entspricht, mithin folgen aus (7)

$$S_a = S_c, \quad M_a + S_a\, a = M_b\,.$$

Im folgenden setzen wir $E_1 = E_2 = E$. Wegen der Symmetrie der elastischen Linie an den beiden Seiten der Stabmitte haben wir $\frac{d y_2}{d x} = 0$ für $x = a$; aus dieser Bedingung ergibt sich

$$\varphi = \frac{S_a\, a^2}{2\,E\,(J_1 + J_2)} + \frac{M_a\, a}{E\,(J_1 + J_2)} + \frac{J_2}{J_1 + J_2}\, a\,(4\,B - 2\,G_1 - G_2)$$
$$+ \frac{J_1}{J_1 + J_2}\, a\, \{ e^z\, [A\,(\cos z - \sin z) + B\,(\cos z + \sin z)]$$
$$- e^{-z}\, [C\,(\cos z + \sin z) - D\,(\cos z - \sin z)] \}\,.$$

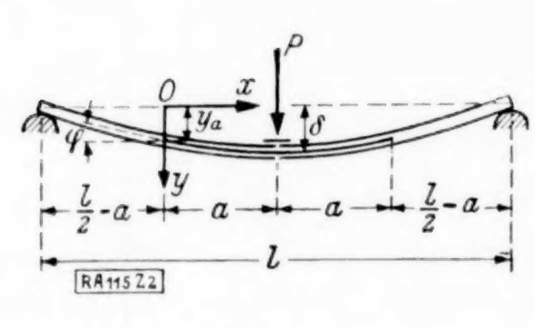


Abb. 2.

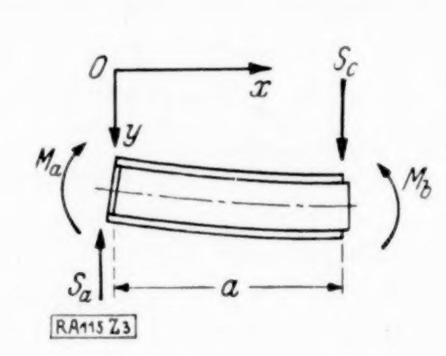


Abb. 3.

Falls z groß genug ist, können wir näherungsweise schreiben, wie aus (17) und (18) zu entnehmen ist,

$$\varphi = \frac{S_a\, a^2}{2\,E\,(J_1 + J_2)} + \frac{M_a\, a}{E\,(J_1 + J_2)} - \frac{J_2}{J_1 + J_2}\, a\,(2\,G_1 + G_2)$$
$$+ \frac{J_1}{J_1 + J_2}\, a\, e^z\, [A\,(\cos z - \sin z) + B\,(\cos z + \sin z)]\,.$$

Mit den Ausdrücken für A und B aus (17) unter Beachtung auf (12)

$$\varphi = \frac{M_a\, a}{E\,(J_1 + J_2)} \left[1 + \frac{J_1}{z\,J_2}\left(1 + \frac{J_2^2}{J_1^2}\right)\right] + \frac{S_a\, a^2}{2\,E\,(J_1 + J_2)} \left[1 + \frac{2\,J_1}{z\,J_2} + \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right)\right] \quad . \quad . \quad (19).$$

Gewöhnlich ist J_1 viel größer als J_2, und z ist größer als eins; also wenn $\frac{J_2^2}{J_1^2}$ und $\frac{1}{z^2}$ gegen eins vernachlässigt werden können, dann wird:

$$\varphi = \frac{M_a\, a}{E\,(J_1 + J_2)} \left(1 + \frac{J_1}{z\,J_2}\right) + \frac{S_a\, a^2}{2\,E\,(J_1 + J_2)} \left(1 + \frac{2\,J_1}{z\,J_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Die Durchbiegung der Schiene in der Mitte der Spannweite, d. h. für $x = a$, ergibt sich aus der ersten Gleichung von (6), nämlich zu:

$$(y_1)_{x=a} = \delta = n_1\,(\eta)_{x=a} + f\,(a)\,.$$

Setzen wir hierin die Ausdrücke aus (10), (16), (17), und vernachlässigen die unwichtigen Glieder, dann erhalten wir:

$$\delta = y_a + \varphi\, a - \frac{S_a\, a^3}{6\,E\,(J_1 + J_2)} \left[1 - \frac{3}{z^2}\left(1 - \frac{J_2}{J_1}\right) - \frac{6\,J_2}{z^3\,J_1}\right] - \frac{M_a\, a^2}{2\,E\,(J_1 + J_2)} \left[1 + \frac{2\,J_2}{z\,J_1} - \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right)\right],$$

wobei im vorliegenden Falle

$$S_a = \frac{P}{2}, \quad M_a = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - a\right), \quad y_a = \varphi\left(\frac{l}{2} - a\right) + \frac{P}{6\,E\,J_1}\left(\frac{l}{2} - a\right)^3,$$

und φ aus (19) einzuführen ist. So erhalten wir nach kleiner Zwischenrechnung

$$\delta = \frac{P\,l^3}{48\,E\,J_1} - \frac{P}{E\,(J_1 + J_2)}\,\frac{J_2}{J_1}\,\frac{a\,l^2}{8}\left(1 - \frac{2\,a}{l} + \frac{4}{3}\,\frac{a^2}{l^2}\right)$$

$$+ \frac{P}{E(J_1 + J_2)}\left\{\frac{a\,l^2}{8\,z}\left[\frac{J_1}{J_2} + \frac{J_2}{J_1}\left(1 - \frac{2\,a}{l}\right)^2\right] + \frac{a^2\,l}{4\,z^2}\left[1 + \frac{J_2}{J_1} - \frac{2\,J_2\,a}{J_1\,l}\right] + \frac{a^3}{2\,z^3}\,\frac{J_2}{J_1}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die Durchbiegung einer unzerschnittenen Schiene (also ohne Laschenverbindung), und das zweite Glied drückt die versteifende Wirkung der Laschen aus, während das letzte Glied auf die elastische Nachgiebigkeit der Verbindung zurückzuführen ist. Setzen wir

$$\delta' = \frac{P\,l^3}{48\,E\,J_1},$$

so folgt

$$\frac{\delta - \delta'}{P}\,\frac{8\,E(J_1 + J_2)}{a\,l^2}\,\frac{J_2}{J_1} + \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2\left(1 - \frac{2\,a}{l} + \frac{4}{3}\,\frac{a^2}{l^2}\right)$$

$$= \frac{1}{z}\left[1 + \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2\left(1 - \frac{2\,a}{l}\right)^2\right] + \frac{2}{z^2}\,\frac{a}{l}\,\frac{J_2}{J_1}\left[1 + \left(1 - \frac{2\,a}{l}\right)\frac{J_2}{J_1}\right] + \frac{4}{z^3}\,\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22),$$

oder näherungsweise

$$\frac{1}{z} = \frac{\delta - \delta'}{P}\,\frac{8\,E\,(J_1 + J_2)}{a\,l^2}\,\frac{J_2}{J_1} + \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2\left(1 - \frac{2\,a}{l} + \frac{4}{3}\,\frac{a^2}{l^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Falls J_1 im Vergleich mit J_2 sehr groß ist, dann vereinfacht sich dieser Ausdruck zu:

$$\frac{1}{z} = \frac{\delta - \delta'}{P}\,\frac{8EJ_2}{a\,l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

In diesem Fall wird a wie folgt:

$$a = \sqrt[4]{\frac{K_1}{4\,E\,J_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,a).$$

Diese Definition von a und die Gl. (24) entsprechen dem Fall, wo ein Balken in einer elastisch-nachgiebigen Mauer von großen Dimensionen eingespannt ist.

Bei praktischen Anwendungen der vorstehenden Berechnung muß u. a. der numerische Wert von a für die betreffende Schiene bekannt sein. Dieser Wert kann durch Biegeversuche bestimmt werden, nämlich aus den Versuchswerten von Durchbiegungen δ und δ', die an Schienen mit bzw. ohne Verbindung ermittelt werden können. Allerdings wird δ durch den Befestigungszustand der Verbindung stark beeinflußt. Die Versuchswerte von der spezifischen Durchbiegung $\frac{\delta}{P}$, die in Zahlentafel 1 gegeben sind, beziehen sich auf einen sehr festen Zustand. Im vorliegenden Falle wurde a zuerst durch die Gl. (23) berechnet. Ein

Zahlentafel 1.
Hauptabmessungen der Schienen und Laschen.
Ergebnisse von Biegeversuchen.

Schienenprofile [3])	37 K	50 K PS
Trägheitsmoment der Schienen J_1 cm^4	952	1744
Desgl. zwei Laschen J_2 cm^4	136×2	164×2
Widerstandsmoment der Schiene $\frac{J_1}{e_1}$ cm^3	149 (Kopf) 163 (Fuß)	225 (Kopf) 261 (Fuß)
Desgl. zwei Laschen $\frac{J_2}{e_2}$ cm^3	56,1 (Kopf) 65,2 (Fuß)	71,8 (Kopf) 74,2 (Fuß)
Spannweite l cm	100	100
Länge der Lasche $2\,a$ cm	56	56
Durchbiegung der Schiene mit Verbindung $\frac{\delta}{P}$ cm/kg	$0{,}210 . 10^{-4}$	$0{,}118 . 10^{-4}$
Durchbiegung der Schiene ohne Verbindung $\frac{\delta'}{P}$ cm/kg	$0{,}122 . 10^{-4}$	$0{,}0672 . 10^{-4}$
a berechnet aus (23) cm^{-1}	0,162	0,270
a berechnet aus (24) cm^{-1}	0,261	0,375

[3]) Die Bezeichnung und die Querschnittsgröße sind nach der Angabe der Stahlwerke Yawata, Japan.

noch genauerer Wert kann durch (22) gegeben werden, aber die Berechnung mit Beibehaltung von $\frac{1}{z^2}$ und $\frac{1}{z^3}$ zeigte, daß das Resultat sich nicht viel vom gegebenen Werte unterscheidet. Der Einfluß des Befestigungszustandes scheint viel wichtiger zu sein.

Die Zahlentafel zeigt auch die durch (24) gegebenen Werte von a. Die Abweichungen zwischen den beiden Reihen von a sind so bedeutend, daß je nach dem Verwendungszwecke eine oder andere gewählt werden müssen.

3. Durchführung der Berechnung.

Bevor wir auf die Berechnung zweiter Annäherung eingehen, wollen wir im folgenden zunächst die allereinfachste Berechnung ausführen, um einen Einblick in den Spannungszustand zu bekommen. Ist die Biegungssteifigkeit der Schiene viel größer als diejenige der Laschen, so können wir in einer ersten Annahme den Schienenstrang als einen Balken von überall gleichmäßigem Querschnitt betrachten, indem die Wirkung der Laschen, die sich wie ein elastisches Gelenk verhalten, nur an den Stoßenden der Schienen berücksichtigt wird. Für die Wirkung der Schwellen werde die vereinfachende Annahme einer kontinuierlichen Bettung gemacht; der Schienenstrang trage eine Einzellast P an einem um λ von der Verbindungsstelle abstehenden Punkte, Abb. 4. Setzen wir an einem Schienenende $M_c = S_c = 0$, so erhalten wir aus (12)

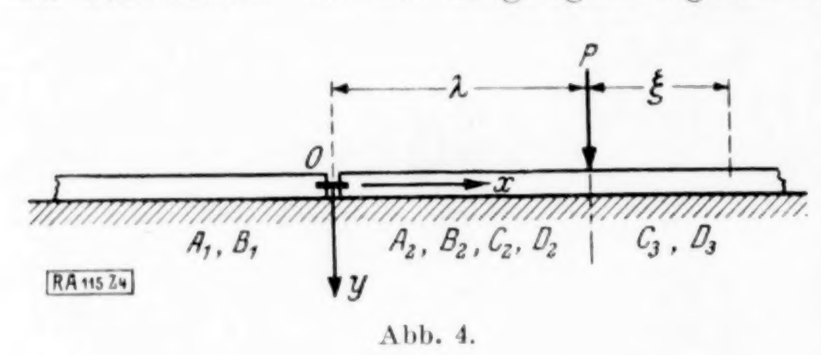


Abb. 4.

$$G_3 = \frac{M_b}{2\,a^2\,E\,J_2}, \quad G_4 = \frac{S_b}{2\,a^3\,E\,J_2} \qquad (25),$$

wobei E für E_2 des Laschenmaterials steht (der Elastizitätsmodul des Schienenmaterials wird, wie schon bemerkt, auch gleich E genommen).

Nun drücken wir die Relativverschiebungen, η bzw. $\frac{d\eta}{dx}$, an der Stelle $x = a$ durch η_1 bzw. η_{x1} aus. Diese sind nach (4) wieder mit $z = \alpha a$:

$$\eta_1 = e^z\,[A\cos z + B\sin z],$$

und

$$\eta_{x1} = \alpha\,e^z\,[(A + B)\cos z + (B - A)\sin z],$$

indem die Glieder mit e^{-z} vernachlässigt werden.

Setzen wir die Ausdrücke von A und B aus (17) ein, so erhalten wir

$$\eta_1 = G_3 - G_4,$$

$$\eta_{x1} = \alpha\,(2\,G_3 - G_4).$$

Man kann dies auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= b\,M_b + c\,S_b \\ \eta_{x1} &= b_1\,M_b + c_1\,S_b \end{aligned}\right\} \qquad (26),$$

wenn man setzt:

$$b_1 = \frac{1}{\alpha\,E\,J_2} \quad \text{und} \quad c = -\frac{1}{2\,\alpha^3\,E\,J_2} \qquad (27).$$

Die Koeffizienten b und c_1 fallen in der folgenden Berechnung heraus.

Um die Gleichungen der elastischen Linie aufzustellen, nehmen wir die Stelle der Stoßverbindung als den Anfangspunkt und zerlegen den ganzen Schienenstrang in drei Teilstrecken, nämlich

(I) die halb unendliche Strecke $x < 0$,

(II) die Zwischenstrecke $\lambda > x > 0$,

(III) die andere unendliche Strecke $x > \lambda$, oder $\xi = x - \lambda > 0$.

Dann kann man schreiben:

$$x < 0, \quad y = e^{\beta x}\,(A_1 \cos\beta x + B_1 \sin\beta x) \qquad (28),$$

$$\lambda > x > 0, \quad y = e^{\beta x}(A_2 \cos\beta x + B_2 \sin\beta x) + e^{-\beta x}(C_2 \cos\beta x + D_2 \sin\beta x) \quad . \quad (29),$$

$$\xi > 0, \quad y = e^{-\beta\xi}(C_3 \cos\beta\xi + D_3 \sin\beta\xi) \quad \ldots \ldots \quad (30),$$

wobei

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4 E J_1}} \quad \ldots \ldots \quad (31).$$

K ist die sogen. Bettungsziffer, und J_1 ist das Trägheitsmoment des Schienenquerschnitts.

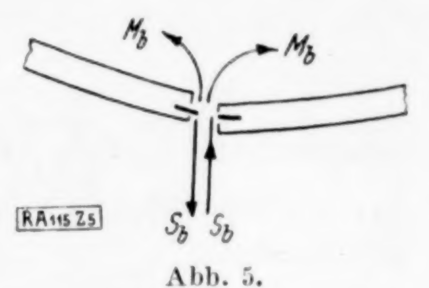


Abb. 5.

Die acht Konstanten in den obigen Gleichungen lassen sich aus den Randbedingungen bestimmen; dabei ist die Unstetigkeit der elastischen Linie der Schienen (aber nicht der Laschen) an der Stelle $x = 0$ zu beachten. An dieser Stelle wirken das Biegungsmoment M_b und die Schubkraft S_b auf den Laschenquerschnitt, Abb. 5. In bezug auf die erste Teilstrecke ($x < 0$) wird die Relativverschiebung zwischen Schiene und Laschen an dieser Stelle durch die Formel (26) ausgedrückt, während die Relativverschiebung des benachbarten Teils ($x > 0$) an derselben Stelle durch die folgenden Gleichungen gegeben wird:

$$\left.\begin{aligned} \eta_2 &= b\, M_b - c\, S_b \\ -\eta_{x2} &= b_1\, M_b - c_1\, S_b \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (32).$$

Die elastische Linie der Laschen ist natürlich stetig an dieser Stelle; es muß also eine Art der unstetigen Änderung der Durchbiegung und der Richtung an den Schienenschwerlinien entstehen, nämlich um die Größen

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 - \eta_2 &= 2 c\, S_b \\ \eta_{x1} - \eta_{x2} &= 2\, b_1\, M_b \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (33),$$

d. h. die Relativdurchbiegung der beiden Schienen ist $2 c\, S_b$, während die Relativneigung $2\, b_1\, M_b$ beträgt. Die anderen Randbedingungen am Anfangspunkte sind durch die Stetigkeit von $\frac{d^2 y}{d x^2}$ und $\frac{d^3 y}{d x^3}$ gegeben; ferner fordern die Bedingungen am Angriffspunkte der Last die Stetigkeit von y, $\frac{d y}{d x}$, $\frac{d^2 y}{d x^2}$ und die Unstetigkeit von $\frac{d^3 y}{d x^3}$.

Es sei nun gesetzt:

$$P' = \frac{P}{8\,\beta^3\, E\, J_1}, \qquad p = \frac{2\,\beta^3\, J_1}{a^3\, J_2}, \qquad q = \frac{4\,\beta J_1}{a\, J_2} \quad \ldots \ldots \quad (34).$$

Dann erhalten wir aus den vorstehenden Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= 2\, P'\, e^{-\beta\lambda} \left\{ \left(\frac{2+q}{4+q} - \frac{p}{2+p} \right) \cos\beta\lambda + \frac{2}{4+q} \sin\beta\lambda \right\} \\
B_1 &= -\, P'\, e^{-\beta\lambda}\, \frac{4}{4+q} (\cos\beta\lambda - \sin\beta\lambda) \\
A_2 &= P'\, e^{-\beta\lambda} (\cos\beta\lambda + \sin\beta\lambda) \\
B_2 &= -\, P'\, e^{-\beta\lambda} (\cos\beta\lambda - \sin\beta\lambda) \\
C_2 &= P'\, e^{-\beta\lambda} \left\{ \left(\frac{2p}{2+p} + \frac{q}{4+q} \right) \cos\beta\lambda - \frac{q}{4+q} \sin\beta\lambda \right\} \\
D_2 &= -\, P'\, e^{-\beta\lambda}\, \frac{q}{4+q} (\cos\beta\lambda - \sin\beta\lambda) \\
C_3 &= P' \left\{ 1 + e^{-2\beta\lambda} \left[\frac{p}{2+p} (1 + \cos 2\beta\lambda) + \frac{q}{4+q} (1 - \sin 2\beta\lambda) \right] \right\} \\
D_3 &= P' \left\{ 1 - e^{-2\beta\lambda} \left[\frac{q}{4+q} \cos 2\beta\lambda + \frac{p}{2+p} \sin 2\beta\lambda \right] \right\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (35),$$

Das Biegungsmoment an der Verbindungsstelle $x = 0$ ist nun

$$M_b = -\, E\, J_1 \frac{d^2 y}{d x^2} = -\, 2\, E\, J_1\, \beta^2\, B_1 .$$

Mit dem Ausdruck für B_1 (35) ergibt sich

$$M_b = \frac{P}{\beta} \frac{e^{-\beta\lambda}}{4+q} (\cos\beta\lambda - \sin\beta\lambda) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36).$$

$\frac{d M_b}{d\lambda} = 0$, wenn $\cos\beta\lambda = 0$. Ein ausgezeichneter Wert von M_b ist also

$$M_b = -\frac{P e^{-\frac{\pi}{2}}}{\beta(4+q)} = -\frac{0{,}2079\,P}{\beta(4+q)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37),$$

entsprechend $\lambda = \frac{\pi}{2\beta}$, aber der Absolutbetrag dieses negativen Momentes ist viel kleiner als das positive Moment, welches die am Anfangspunkte wirkende Last ergibt, d. h. aus (36) mit $\lambda = 0$

$$M_b = \frac{P}{\beta(4+q)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38).$$

Wenn die Schiene keine Stoßverbindung hat, dann ist das Biegungsmoment unter dem Raddruck gleich $\frac{P}{4\beta}$. Der vorstehende Ausdruck für M_b ist mehr oder weniger kleiner als dieser Ausdruck, je nachdem q groß oder klein ist.

Die Durchbiegung der elastischen Linie, δ_0, an der Stelle der Stoßverbindung ist gemäß der Randbedingung zweideutig, und zwar ist sie gleich A_1 oder $A_2 + C_2$, je nachdem die Durchbiegung sich auf den linken oder rechten (also unmittelbar unter Druck stehenden) Stabteil bezieht. Also am ersten bzw. zweiten Schienenende

$$\delta_0 = \frac{P}{4\beta^3 E J_1} e^{-\beta\lambda} \left\{ \left(\frac{2+q}{4+q} \mp \frac{p}{2+p} \right) \cos\beta\lambda + \frac{2}{4+q} \sin\beta\lambda \right\} \quad \ldots \quad (39),$$

wo das obere bzw. untere Vorzeichen für das linke bzw. rechte Ende steht.

Falls $\lambda = 0$,

$$\delta_0 = \frac{P}{4\beta^3 E J_1} \left(\frac{2+q}{4+q} \mp \frac{p}{2+p} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40).$$

Nach den Versuchsresultaten der japanischen Eisenbahn soll für K als ein ungefährer Mittelwert 100 kg/cm² angenommen werden; diese Zahl ist überall im folgenden als eine Konstante behandelt. Die berechneten Werte von β nach (31) sind in Zahlentafel 2 gegeben. Ferner sind die Werte von q nach (34) und die von M_b nach (38) in derselben Zahlentafel zusammengestellt. Bei der Berechnung von q wurden die Werte von α nach (23) benutzt. Die Spannung σ in den Laschen ist auch aus der Zahlentafel ersichtlich, und zwar bezieht sich die positive Spannung auf den Fuß und die negative Spannung auf den Kopf.

Zahlentafel 2.

Biegungsmoment und Spannung in den Laschen.

Schienenprofile	β cm⁻¹	q	M_b kgcm	σ kg/cm²	σ für $P = 7500$ kg 1000 kg/cm²
37 K	0,01070	0,925	19,0 P	$-0{,}339\,P$ / $0{,}291\,P$	$-2{,}54$ / $2{,}18$
50 K PS	0,00920	0,725	23,0 P	$-0{,}320\,P$ / $0{,}310\,P$	$-2{,}40$ / $2{,}33$

Die numerischen Werte von M_b und σ in dieser Zahlentafel beziehen sich auf den festgeschraubten Zustand. Wenn die Verbindung weniger fest ist, dann wird q größer und M_b natürlich kleiner. Um die Beanspruchung von Laschen zu beurteilen, haben wir also einen möglichst festen Zustand zu betrachten, aber die der Schiene soll im weniger festen Zustand berechnet werden, weil die Spannung dann groß ist. Im ungünstigsten Falle kann die Verbindung ganz lose sein; dann kann die Laschensteifigkeit nichts zur Festigkeit der Schiene beitragen. So setzen wir J_2 gleich Null, und damit erhalten wir $p = q = \infty$. Das Biegungsmoment in einem beliebigen Querschnitt in der dritten Teilstrecke der Schiene $(x > \lambda)$ ist nun

$$M = -E J_1 \frac{d^2 y}{dx^2} = -2\beta^2 E J_1 e^{-\beta\xi} (C_3 \sin\beta\xi - D_3 \cos\beta\xi).$$

Nach (35) ergeben sich mit $\lambda = 0$ und $p = q = \infty$

$$C_3 = 4\,P',$$

$$D_3 = 0.$$

Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichung für M ein, dann wird:

$$M = -8\,\beta^2\,E\,J_1\,e^{-\beta\xi}\,P'\sin\beta\,\xi = -\frac{P}{\beta}\,e^{-\beta\xi}\sin\beta\,\xi \quad \ldots\ldots \quad (41).$$

Nun ist $\frac{dM}{d\xi} = 0$, wenn $\tan\beta\,\xi_1 = 1$; mit der ersten Wurzel, d. h. $\beta\,\xi_1 = \frac{\pi}{4}$, ergibt sich also:

$$M = -0{,}3224\,\frac{P}{\beta} \quad \ldots\ldots \quad (42).$$

Der Betrag dieses Momentes und die entsprechende Spannung sind berechnet, und zwar für die als Beispiel angenommenen Schienenquerschnitte, Zahlentafel 3. Die positive Spannung entsteht in der Kopffaser.

Zahlentafel 3.

Biegungsmoment und Spannung in den Schienen.

Schienen-profile	Abstand $\xi_1 = \frac{\pi}{4\,\beta}$ cm	M nach (42) kgcm	σ kg/cm²	σ für $P = 7500$ kg 1000 kg/cm²
37 K	73,4	30,1 P	0,202 P	1,52
50 K PS	85,4	35,0 P	0,156 P	1,17

4. Größte Beanspruchung.

Nach der im dritten Abschnitt ausgeführten einfachen Berechnung ist das von einer Einzellast P herrührende Biegungsmoment an der Stoßverbindung am größten, wenn P gerade an dieser Stelle angreift. Im vorliegenden Abschnitt nehmen wir also den Fall, wo P an der Stoßverbindung, und zwar wie im zweiten Abschnitt, ganz symmetrisch für die beiden Schienenäste wirkt, um die Berechnung zu vereinfachen. Es sei angenommen, daß die Länge der Laschen gleich der Entfernung der beiden gegenüberstehenden Endschwellen l_2 ist[4]), Abb. 6, in welcher der Abstand l_1 gewöhnlich größer als l_2 ist. Jeder Schienenast liegt nach der gewählten Annahme von der zweiten Schwelle ab auf einer kontinuierlichen Bettung. Wegen der Symmetrie des Belastungszustandes ist die Neigung der elastischen Linie in der Mitte der Lasche offenbar gleich Null.

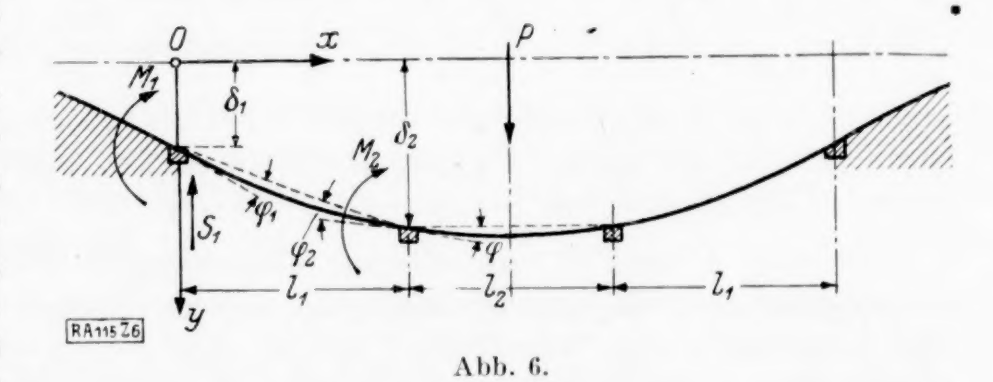


Abb. 6.

In bezug auf die in der Abbildung aufgezeichneten Koordinatenachsen läßt sich die elastische Linie der Schiene, die auf der links stehenden, kontinuierlichen Bettung liegt, durch[5])

$$y = e^{\beta x}\,(A\cos\beta\,x + B\sin\beta\,x) \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

darstellen, woraus für $x = 0$ folgen:

$$y = \delta_1 = A, \quad \frac{dy}{dx} = \beta\,(A + B),$$

$$M_1 = -E\,J_1\,\frac{d^2y}{dx^2} = -2\,\beta^2\,E\,J_1\,B, \quad S_1 = -E\,J_1\,\frac{d^3y}{dx^3} = -2\,\beta^3\,E\,J_1\,(B - A).$$

Die Bedingung der Stetigkeit der Neigung an dieser Stelle ist mit den Bezeichnungen in der Abbildung:

$$\beta\,(A + B) = \frac{\delta_2 - \delta_1}{l_1} + \varphi_1 \quad \ldots\ldots \quad (44).$$

[4]) In Wirklichkeit ist die Länge der Laschen etwas größer als l_2.
[5]) Die Konstanten A und B sind mit den vorher benutzten, gleichnamigen Konstanten nicht zu verwechseln.

Drückt L den konstanten Abstand zwischen zwei benachbarten Schwellen aus, so ist KL die Belastung, die die elastische Senkung einer Schwelle um 1 cm hervorruft. Folglich gilt die Beziehung:

$$\delta_2 = \frac{1}{KL}\left(\frac{P}{2} - S_1\right) = \frac{1}{KL}\left[\frac{P}{2} + 2\beta^3 E J_1 (B - A)\right],$$

und bei Benutzung der bekannten Gleichung $\varphi_1 = \frac{l_1}{6 E J_1}(2 M_1 + M_2)$,

$$\varphi_1 = \frac{\beta^2 l_1}{3}[\beta l_1 A - (\beta l_1 + 3) B],$$

da $M_2 = M_1 + S_1 l_1$ ist.

Die obige Bedingung liefert eine Gleichung für A und B, während eine andere Gleichung sich von der Bedingung an der Schwelle ergibt, nämlich

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{l_1} - \varphi_2 = \varphi \quad \ldots \quad (45),$$

wobei

$$\varphi_2 = \frac{l_1}{6 E J_1}(M_1 + 2 M_2) = \frac{\beta^2 l_1}{3}[2 \beta l_1 A - (2 \beta l_1 + 3) B],$$

und φ ist aus (19) oder (20) einzuführen.

Die letztere Formel lautet mit aus dem Zusammenhang leicht ersichtlicher Umformung

$$\varphi = \frac{P l_2^2}{16 E (J_1 + J_2)}\left(1 + \frac{4 J_1}{\alpha l_2 J_2}\right) + \frac{J_1 \beta^2 l_2}{J_1 + J_2}[\beta l_1 A - (\beta l_1 + 1) B]\left(1 + \frac{2 J_1}{\alpha l_2 J_2}\right) \quad \ldots \quad (46).$$

Auf diese Weise lassen sich zwei Gleichungen für A und B schreiben, d. h.

$$A\left\{1 + \frac{1}{2 \beta l_1 \beta L} + \frac{1}{\beta l_1} - \frac{1}{3}(\beta l_1)^2\right\} + B\left\{1 - \frac{1}{2 \beta l_1 \beta L} + \beta l_1 + \frac{1}{3}(\beta l_1)^2\right\} = \frac{P}{8 \beta l_1 \beta L \beta^3 E J_1} \quad (47),$$

$$\left.\begin{aligned} & A\left\{\frac{1}{2 \beta l_1 \beta L} + \frac{1}{\beta l_1} + \frac{J_1}{J_1 + J_2}\beta l_1 \beta l_2\left(1 + \frac{2 J_1}{\alpha l_2 J_2}\right) + \frac{2}{3}(\beta l_1)^2\right\} \\ & - B\left\{\frac{1}{2 \beta l_1 \beta L} + \beta l_1 + \frac{J_1}{J_1 + J_2}\beta l_2 (1 + \beta l_1)\left(1 + \frac{2 J_1}{\alpha l_2 J_2}\right) + \frac{2}{3}(\beta l_1)^2\right\} \\ & = P\left\{\frac{1}{8 \beta l_1 \beta L \beta^3 E J_1} - \frac{l_2^2}{16 \beta E (J_1 + J_2)}\left(1 + \frac{4 J_1}{\alpha l_2 J_2}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (48).$$

Wenn A und B aus diesen Gleichungen ermittelt werden, dann erhalten wir das Biegungsmoment M_2 am Querschnitt, welcher gerade auf einer Schwelle steht, aus:

$$M_2 = 2 \beta^2 E J_1 [\beta l_1 A - (\beta l_1 + 1) B] \quad \ldots \quad (49),$$

und das Moment M_b in der Mitte aus:

$$M_b = M_2 + \frac{P l_2}{4} \quad \ldots \quad (50).$$

Zahlentafel 4.

Biegungsmoment und Spannung in den Laschen.

Schienen-profile	l_1 cm	l_2 cm	$\frac{P l_2}{4}$ kgcm	M_2 kgcm	M_b kgcm	σ kg/cm²	σ für $P = 7500$ kg 1000 kg/cm²
37 K	51,2	50,8	12,7 P	6,3 P	19,0 P	− 0,339 P / 0,291 P	− 2,54 / 2,18
50 K PS	51,2	50,8	12,7 P	9,9 P	22,6 P	− 0,314 P / 0,304 P	− 2,36 / 2,28
50 K PS	43,2	38,0	9,5 P	11,3 P	20,8 P	− 0,289 P / 0,280 P	− 2,17 / 2,10

Das letzte Glied auf der rechten Seite ist bekanntlich das größte Moment, welches in einem beiderseits frei gestützten Balken entsteht. M_b ist größer als dieses Moment, wenn M_2 positiv ist, wie sich im folgenden Zahlenbeispiele herausstellt. Der konstante Schwellenabstand L, welcher zum Versuchswerte $K = 100$ kg/cm² entspricht, ist gleich 71,1 cm; die Abstände l_1 und l_2 nehmen wir nach den Bestimmungen in der Praxis; siehe Zahlentafel 4. Mit den in den Zahlentafeln 1 und 2 angeführten Werten von α (23) und β erhalten wir die zusammengestellten Werte des Biegungsmomentes und der Spannung in den Laschen. Die positiven bzw. negativen Spannungen wirken an den Fuß- bzw. Kopffasern.

Wie aus der Zahlentafel ersichtlich, bewirkt die Abnahme der Schwellenabstände eine Zunahme von M_2; infolgedessen nimmt das Gesamtmoment M_b nicht proportional mit l_2 ab.

Das Biegungsmoment und die Spannung in Schienen werden erheblich, wie schon bemerkt wurde, wenn die Stoßverbindung ganz lose ist. Nach dieser Annahme haben wir M_b von (50) gleich Null zu setzen, und diese Bedingung und die Gleichung (47) ergeben A und B. Es ist dabei zu beachten, daß P auf die beiden Schienenäste gleich verteilt wirkt; also ist das Resultat zu verdoppeln, um das Biegungsmoment zu bekommen, welches von der ganzen Belastung herrührt, die auf ein Schienenende wirkt. Zahlentafel 5 zeigt die numerischen Werte.

Zahlentafel 5.

Biegungsmoment und Spannung in den Schienen.

Schienenprofile Schwellenabstände	Abstand vom Schienenende cm	Max. Biegungsmoment kgcm	σ kg/cm²	σ für $P = 7500$ kg 1000 kg/cm²
50 K PS $\left(\begin{matrix} l_1 = 51{,}2 \text{ cm} \\ l_2 = 50{,}8 \text{ cm} \end{matrix}\right)$	90,5	30,1 P	0,134 P	1,01
50 K PS $\left(\begin{matrix} l_1 = 43{,}2 \text{ cm} \\ l_2 = 38{,}0 \text{ cm} \end{matrix}\right)$	87,6	27,0 P	0,120 P	0,900

5. Schlußbemerkungen.

Die Biegung zweier zusammengesetzter Stäbe, bei welchen eine Kräftewirkung zwischen den beiden mit gegenseitigen Verschiebungen der Stabachsen auftritt, kann auf Grund einer Annahme behandelt werden, welche besagt, daß die Lastspannung auf der Anlagefläche jedes Stabes der Relativdurchbiegung proportional ist.

Nach der Berechnung der allerersten Annäherung, Abschnitt 3, sind die Spannungen in Laschen und Schienen gut übereinstimmend mit oder etwas verschieden von denjenigen der zweiten Annäherung, Abschnitt 4. Mit Rücksicht auf diese Genauigkeit können wir durch Anwendung der Näherungsformeln einen Überblick über den qualitativen Zusammenhang gewinnen, während eine genauere Berechnung z. B. bei verschiedenen Abständen der Schwellen wie im letzteren Abschnitt in jedem besonderen Falle ausgeführt werden kann.

Das Biegungsmoment M_b hängt nach der Näherungsformel (38) u. a. von der Steifigkeit der Schiene ab, wie dies der Koeffizient β (31) zeigt, ferner von der Verhältniszahl q (34). Im festgeschraubten Zustand der Stoßverbindung scheint der Einfluß von q nicht sehr bedeutend zu sein. Wenn wir also von q absehen, so steigt das Biegungsmoment mit der Zunahme des Schienenquerschnitts, da β sich mit dem Wachsen des Trägheitsmomentes J_1 verringert. Folglich genügt eine kleine Vergrößerung des Laschenquerschnitts nicht, um die Spannung merklich zu ermäßigen.

Die vorliegende statische Berechnung zeigt, daß das Laschenmaterial im Vergleich mit dem Schienenmaterial sehr hoch beansprucht wird. Es bedarf aber kaum der Feststellung, daß die wirkliche Höhe der Beanspruchung erst richtig beurteilt werden kann, wenn auch die dynamische Wirkung der rollenden Last berücksichtigt wird.

An dieser Stelle sei meinen Freunden und Kollegen, insbesondere Herren T. Inada, N. Motomori und H. Reißner, die durch Angabe der numerischen Werte in der Praxis, Ausführung der Versuche oder Durchlesen des Manuskripts mich unterstützt haben, bestens gedankt.

Arbeitsgesetze bei elastisch-plastischer Balkenbiegung.

Von *Josef Fritsche*, Prag.

Die derzeitige Plastizitätstheorie hat sich in der Hauptsache auf das Studium der Gleitlinienfelder bei plastisch verformten Körpern eingestellt und hat versucht, die am Körper angreifenden äußeren Kräfte mit dem ersten Auftreten dieser Gleitlinien zu verknüpfen; die Form eines möglichen Gleitlinienfeldes ist in der Regel der Ausgangspunkt der Untersuchung. Daß dieser Weg bei sandartigen Stoffen, bei denen etwaige elastische Verformungen ohne Einfluß auf das Tragvermögen sind, zu brauchbaren Ergebnissen führt, ist ohne Zweifel; andererseits ist aber nicht zu leugnen, daß er für elastisch-plastische Verformungsvorgänge, die für die Baustoffe unserer Tragwerke kennzeichnend sind, nicht zu einer physikalisch und technisch richtigen Verknüpfung derselben mit den sie hervorrufenden äußeren Lasten führen kann. Er wäre nur dann richtig, wenn man die Grenzen der plastisch verformten Gebiete nach Gleitlinien und die Verformung der lediglich elastisch verformten Teile des Körpers als klein gegenüber der plastischen Verformung annehmen würde. Daß die 2. Annahme zu unrichtigen Ergebnissen führen muß, folgt daraus, daß dem Auftreten plastischer Gebiete eine rein elastische Verformung des ganzen Körpers vorangeht, die im Verein mit einer Plastizitätsbedingung die Grenzen der plastizierten Gebiete bestimmt. Auch die Größenordnung der plastischen Verformung ist noch recht lange nach Beginn des Fließens einzelner Gebiete von der der elastischen, so daß eine Vernachlässigung der letzteren als völlig unzulässig erscheint.

Daß die Plastizitätstheorie gerade an die Gleitlinien angeknüpft hat, liegt darin begründet, daß diese eine sichtbare Erscheinung der plastischen Verformung bilden und die Erkenntnis ihrer Ursachen erstes Ziel der Rechnung schien. Nachdem man durch Verbesserung des Versuchswesens gelernt hatte, bleibend verformte Gebiete durch Rekristallisation deutlich sichtbar zu machen, zeigte sich, daß bei elastisch-plastisch verformbaren Stoffen die Gleitlinien für die Kennzeichnung des Grades der Verformung und damit für die Tragfähigkeit unserer Bauwerke keine wesentliche Bedeutung haben. Eine genaue Prüfung der Versuchsergebnisse unter Berücksichtigung der Erkenntnisse über den Gefügeaufbau unserer Werkstoffe führt dann wohl zu der Vorstellung, daß das Auftreten der Gleitlinien bedingt ist durch den besonderen Formänderungsmechanismus unserer Werkstoffe, und daß es mehr oder weniger begünstigt wird durch Zufälligkeiten des Verformungsvorganges; als solche kommen Unstetigkeiten der Spannungs-Dehnungslinie in Betracht, die bei den meisten Stählen in der Nähe der Fließgrenze die Regel bilden, Unstetigkeiten der Belastung, Unregelmäßigkeiten im Gefügeaufbau. Mit Rücksicht auf die Schwierigkeiten der Aufgabe wäre es zufriedenstellend, wenn man die Größe und Form der durch eine bestimmte Belastung hervorgerufenen plastisch verformten Gebiete berechnen könnte, ohne auf die Frage einzugehen, in welcher Weise der Baustoff die plastischen Verformungen möglich macht; erst diese zweite Fragestellung führt auf Gleitlinien, verknüpft diese daher lediglich mit dem Gefügeaufbau, nicht aber mit der am Körper angreifenden Belastung.

Das Gleitlinienfeld ist, wie theoretische Untersuchungen[1]) und Versuche zeigen, mit dem Feld der Hauptschubspannungslinien identisch, die Begrenzungslinien plastisch verformter Gebiete aber sind keine Gleitlinien, sondern die Linien $\tau_{\max} = \text{const}$ des elastischen Spannungszustandes, wobei beim ebenen Verformungszustande $\tau_{\max}$ als skalare Größe vom Betrage $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ aufzufassen und die Konstante durch die besondere, der Rechnung zugrunde gelegte Plastizitätsbedingung bestimmt ist.

Abgesehen von der Anwendung der Plastizitätstheorie in der Lehre vom Erddrucke ist bis heute hauptsächlich die Lösung von ebenen Spannungs- und Formänderungszuständen bei elastisch-plastisch verformbaren Werkstoffen versucht worden, von denen das Problem des örtlichen Druckes als das technisch bedeutendste bezeichnet werden muß. Für die im Bauwesen wichtigsten Festigkeitsaufgaben der Biegung von Stäben bei elastisch-plastischer Verformung sind mit Rücksicht auf die großen mathematischen Schwierigkeiten noch nicht einmal Lösungsversuche gemacht worden; und doch ist die Erkenntnis des Einflusses der plastischen Verformbarkeit unserer Baustähle auf die Tragfähigkeit von Balken von so großer Bedeutung für die Wirtschaftlichkeit im Bauwesen, daß man seit mehreren Jahren bereits große Mühe darauf verwendet hat, rein versuchsmäßig auf diese Zusammenhänge zu kommen. Wichtige Bemessungsformeln für durchlaufende Träger sind nur auf derartigen Versuchen aufgebaut und elastizitätstheoretisch nicht mehr zu verstehen. Es ist einleuchtend, daß man

[1]) Freudenthal, A., Ein Beitrag zur Plastizitätstheorie unter besonderer Berücksichtigung des Problems der lokalen Pressung. Dissertation, vorgelegt an der Deutschen Techn. Hochschule in Prag.

mit Versuchen die ganze Mannigfaltigkeit der verschiedenen Stützungs- und Belastungsmöglichkeiten eines Balkens nur sehr schwer erfassen kann; außerdem ist eine immer mehr fortschreitende, rein versuchsmäßige Begründung unserer Bemessungsverfahren unbedingt unbefriedigend. Man kann daraus die Notwendigkeit folgern, die Aufstellung einer befriedigenden Theorie zur Berechnung der Tragfähigkeit von Balken auf elastisch-plastischer Grundlage zu versuchen.

Der beim Zugversuch beobachtete, ungemein verwickelte Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung eignet sich natürlich nicht als Grundlage einer Rechnung, und es liegt nahe, die Spannungs-Dehnungslinie in der Art des Prandtlschen Vorschlages zu vereinfachen, der zum ideal-plastischen Körper führte; bis zur Fließgrenze gilt daher das Hookesche Gesetz, von da an wird trotz fortschreitender Dehnung eine Spannungserhöhung nicht mehr angenommen. (Abb. 1.) Typische Spannungs-Dehnungslinien von Baustählen beschreibt M. Moser[2]), die bis zu Dehnungen von etwa $\varepsilon = 10$ vT weitgehend den Prandtlschen Voraussetzungen entsprechen; die Formänderungen sind bis zu einem beträchtlichen Maße rein elastisch, plötzlich bricht der bisher so widerstandsfähige Baustoff zusammen, die plastischen Formänderungen setzen unvermittelt und sprunghaft ein. Was die Verfestigung

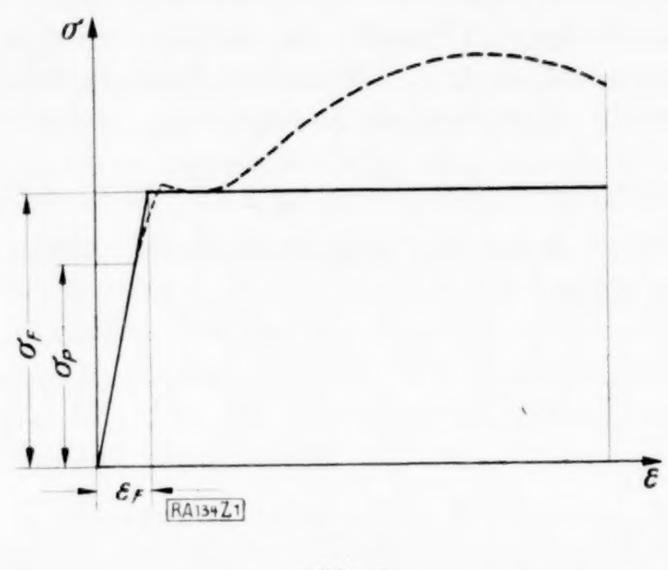


Abb. 1.

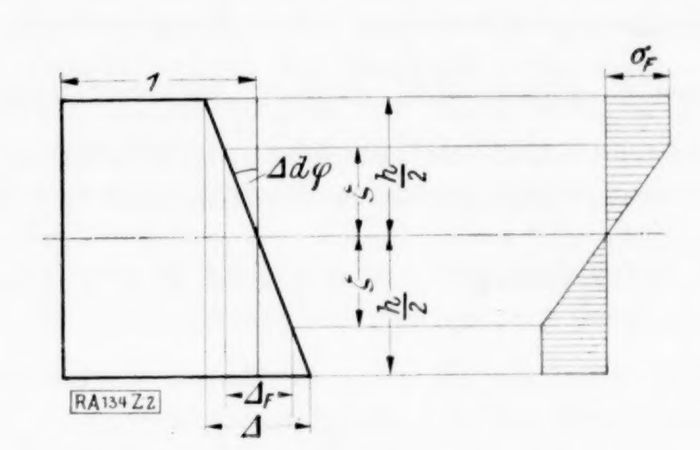


Abb. 2.

anbetrifft, so habe ich bereits früher gezeigt, daß diese unzulässige Verformungen des Tragwerkes nicht aufhalten kann, da vor Einsetzen derselben das Tragwerk in gefährliche Nähe einer durch das Fließen bedingten Instabilität des Gleichgewichtes gelangt, welche besonders bei der im Stahlbau üblichen dünnwandigen Querschnittausbildung immer die Standsicherheit des Bauwerkes begrenzt. Ein Einsetzen der Verfestigung bei dem sicher zu niedrig angenommenen Werte von etwa $\varepsilon = 6$ vT kann die durch die Instabilität der Gleichgewichtslage bedingten Kipp- und Falterscheinungen der Stege und Flanschen schon nicht mehr verhindern.

Mit der Prandtlschen Vereinfachung der Spannungs-Dehnungslinie für den Zugversuch sind die mathematischen Schwierigkeiten der Aufgabe noch immer nicht soweit aus dem Wege geschafft, daß man von der Möglichkeit einer Lösung sprechen kann. Dies wird erst erreicht, wenn man ähnlich wie bei der technischen Balkenbiegung auf elastischer Grundlage noch die Bernoullische Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte macht. Über die Zulässigkeit einer solchen Annahme sind theoretische Untersuchungen noch nicht angestellt worden; für sie spricht ihre weitgehende Richtigkeit auch bei verwickelten elastischen Spannungszuständen[3]), wenn man die Umgebung des Angriffspunktes großer Einzellasten ausschließt und berücksichtigt, daß für den Fall eines noch möglichen Gleichgewichtes die plastischen Verformungen von der Größenordnung der elastischen sind; für sie sprechen außer den Versuchen von Eugen Meyer[4]), Charlottenburg, die günstigen Versuchsergebnisse bei der Überprüfung der bekannten Engesser-Kármán-Formel für die Knicklast eines geraden Stabes bei Überschreitung des Gültigkeitsbereiches der Euler-Formel; und schließlich die gute Übereinstimmung der auf dieser Grundlage berechneten Tragfähigkeit von Stahlbalken[5]) mit den Versuchen von Maier-Leibnitz, Schaim u. a. Unter der Bernoullischen Annahme sind im elastischen Gebiete die Längsspannungen unabhängig von der Schub-

[2]) Moser, M., Grundsätzliches zur Streckgrenze. Forschungsheft 295 des VDI.
[3]) Kármán und Seewald, Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institute der Techn. Hochschule in Aachen, Heft 7.
[4]) Meyer, E., Die Berechnung der Durchbiegung von Stäben, deren Material dem Hookeschen Gesetze nicht folgt. ZVDI. 1908.
[5]) Fritsche, J., Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens. Der Bauingenieur 1930.

spannungsverteilung; bezeichnet man das statische Moment der ersteren, auf die Nullinie des Querschnittes bezogen, mit M_i, dann ist mit den Bezeichnungen der Abb. 2

$$M_i = EJ \cdot \Delta\, d\varphi = EJ \cdot \frac{\Delta}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Erreicht die Randspannung den der Fließgrenze entsprechenden Wert σ_F, soll das statische Moment der inneren Spannungen M_F genannt werden. Es ist für den rechteckigen Querschnitt, der in der Folge stets vorausgesetzt werden soll,

$$M_F = \frac{1}{6}\, b h^2 \sigma_F = W \cdot \sigma_F\,,$$

und die Summe der zugehörigen Randfaserdehnungen Δ_F eines Stabelementes von der Länge 1 ist

$$\Delta_F = \frac{2\,\sigma_F}{E}\,.$$

Das Moment der am Balken angreifenden äußeren Kräfte sei mit M_a bezeichnet, so daß die Gleichgewichtsbedingung die Form $M_i = M_a$ annimmt. Überall $M_a < M_F$ entspricht demnach rein elastischer Verformung des Balkens, stellenweise $M_a > M_F$ elastisch-plastischer Verformung desselben. In diesem Fall bilden sich in dem Gebiete $M_a > M_F$ von den Rändern gegen das Innere fortschreitend Fließgebiete von der Höhe $\frac{h}{2} - \zeta$ aus, denen im Querschnitt ein elastisch gebliebener Kern von der Höhe 2ζ gegenübersteht (Abb. 2). Aus der Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte folgt

$$2\zeta = \frac{\Delta_F}{\Delta}\, h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Damit wird im Gebiete elastisch-plastischer Verformung

$$M_i = \frac{3}{2}\, M_F \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta_F}{\Delta}\right)^2\right] = \frac{3}{2}\,\frac{EJ}{h} \cdot \Delta_F \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta_F}{\Delta}\right)^2\right] \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Daraus folgt, wenn man noch die Gleichgewichtsbedingung $M_a = M_i$ beachtet,

$$\Delta = \pm\, \Delta_F \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{2\,M_a}{M_F}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Bei bekanntem Verlaufe von M_a berechnet sich daraus die Begrenzung des Fließgebietes mit

$$\zeta = \pm\, \frac{h}{2} \sqrt{3 - \frac{2\,M_a}{M_F}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Die Begrenzung des Fließgebietes hat A. Nádai[6]) für einige einfache Belastungsfälle angegeben. Wie man sieht, haben diese Grenzen mit den Gleitlinien nichts zu tun; es sind die Linien $\tau_{\max} = \text{const}$, wobei man in diesem einfachen Falle sowohl nach der Mohrschen als auch nach der Mises-Huberschen Plastizitätsbedingung $\text{const} = \frac{\sigma_F}{2}$ zu setzen hat. Auf die Untersuchung der Gleitlinien wird in der Folge nicht weiter eingegangen, da diese entgegen der herrschenden Auffassung für die Erkenntnis der elastisch-plastischen Verformung ohne Bedeutung sind.

Aus Gl. (4) kann man bereits jenen Wert des Momentes M_a erkennen, bei dem der innere Widerstand des Baustoffes gegen die Verformung erschöpft ist. Bezeichnet man diesen Wert mit M_T, dann wird für $M_T = \frac{3}{2}\, M_F$ die Summe der Randfaserdehnungen $\Delta = \infty$ und $\zeta = o$. Daß eine unendlich große Verformung des Stabelementes im Sinne $\Delta = \infty$ nicht vorstellbar ist, tut nichts zur Sache; ich habe bereits gezeigt[5]), daß bei Verformungen von $\Delta = 6$ vT der Wert M_i schon auf 1 vH an den Grenzwert M_T herangekommen ist. Die Bedingung

$$M_a = M_T = \frac{1}{4}\, b h^2 \sigma_F = T \cdot \sigma_F \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

[6]) Nádai, Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Berlin 1927. Verlag J. Springer.

ist ein Kennzeichen dafür, daß an dieser Stelle das Fließgebiet durch die ganze Höhe des Querschnittes reicht, daß der elastische Kern desselben dort vernichtet ist; diese Stelle vermag einem Fortschreiten der Verformung keinen Widerstand mehr entgegenzusetzen, der Werkstoff hat dort im ganzen Querschnitt jenen Zustand erreicht, den in sinngemäßer Übertragung Haar und Kármán[7]) als den halbplastischen bezeichnet haben. $M_a = T\sigma_F$, wobei $T = \frac{1}{4}bh^2$, kann daher auch als die Plastizitätsbedingung bei der Biegung ohne Längsdruck bezeichnet werden. Überschreitet M_a den Wert M_T, so ist diese Stelle nicht mehr imstande, Gleichgewicht zwischen den inneren Spannungen und den äußeren Kräften zu erzwingen, da dieses an das Bestehen eines elastischen Kernes im Querschnitt gebunden ist; sie wirkt folglich bei einer weiteren Steigerung der Belastung wie ein Gelenk. Aus dem statischen Problem wird bei statischer Bestimmtheit der Stützung ein dynamisches, das den Fließvorgang zeitlich unter Anwendung der Bewegungsgesetze der zähen Flüssigkeiten beschreiben müßte.

Nur bei statisch bestimmt gestützten Balken genügt es, daß an einer einzigen Stelle die Plastizitätsbedingung erfüllt ist, um aus dem stabilen Tragwerk für eine weitere Laststeigerung ein labiles System entstehen zu lassen, dessen Auftreten naturgemäß die Tragfähigkeit des Balkens begrenzt. Für einen statisch bestimmten Fall kann daher diese Tragfähigkeit unmittelbar durch Gleichsetzen des max M_a mit M_T berechnet werden. Bei einem n-fach statisch unbestimmt gestützten Balken ist zum Entstehen einer labilen Trägerform mit Rücksicht auf die n überzähligen steifen Ecken notwendig, daß an $n+1$ Stellen die Plastizitätsbedingung erfüllt ist; damit ist wieder die Tragfähigkeit des Balkens festgelegt. Die Berechnung derselben nach den hier nur angedeuteten Beziehungen für verschiedene Tragsysteme und Belastungen habe ich bereits früher durchgeführt[5]). Daß dabei auch bei statisch unbestimmten Systemen die Berechnung der Tragfähigkeit ohne Eingehen auf die Form der verbogenen Stabachse möglich ist, hängt mit einer Bemerkung von H. Hencky[8]), Delft, zusammen, indem gerade für den Zustand des Gleichgewichtswechsels ein Spannungsfall vorliegt, für den die Gleichgewichtsbedingungen und die Plastizitätsbedingung zur Festlegung desselben ausreichen.

Es bedarf noch eines Hinweises darauf, wieso es zulässig erscheint, bei der Betrachtung elastisch-plastischer Verformungsvorgänge von der Einführung einer Verformungsgeschwindigkeit Abstand nehmen zu können. Bei rein elastischen Vorgängen hilft man sich bekanntlich durch Einführung der sogenannten statischen Belastung, wodurch ein Verformungsvorgang als eine zeitliche Aufeinanderfolge von einzelnen Gleichgewichtslagen erscheint. Die Plastizierung von Teilen des Balkens bedingt zweifellos eine allmähliche Vergrößerung der Verformungsgeschwindigkeit, trotzdem muß aber, solange die im Tragwerke entstehenden inneren Spannungen mit den äußeren Kräften noch Gleichgewicht bilden können, daran festgehalten werden, daß bei genügend langsamer Steigerung der Belastung der Formänderungsvorgang noch aus einer zeitlichen Aufeinanderfolge von Gleichgewichtslagen besteht. Erst von dem Grenzzustande an, der durch das Auftreten labiler Trägerformen gekennzeichnet ist, wird diese Vorstellung sinnlos. Die kleinste Überschreitung dieser Grenzlast löst einen Verformungsvorgang mit großen Verformungsgeschwindigkeiten aus, der erst durch die Verfestigung des Baustoffes zum Stillstande kommen könnte, der aber außerhalb unserer Untersuchungen bleiben kann, weil bei der üblichen dünnwandigen Querschnittsgestaltung des Stahlbaues vorher ein Stabilitätsbruch auftreten wird.

Um die Bedeutung der Tragfähigkeit deutlich zu verstehen und die notwendigen Hilfsmittel zur Berechnung elastisch-plastisch verformter Tragwerke zu bekommen, ist es notwendig, die aus elastischen Formänderungen bekannten Arbeitsgesetze auf den hier betrachteten Fall zu erweitern. Wenn man von einem besonderen auf einen allgemeineren Vorgang schließen darf, dann lassen die folgenden Ergebnisse vermuten, daß das von Hencky[9]) für die Ableitung der Grundgleichungen der Plastizitätstheorie benützte Minimalprinzip der Elastizitätstheorie innerhalb der besprochenen Grenzen nicht ohne Berechtigung auf elastisch-plastische Formänderungsvorgänge übertragen werden darf. Zur Vermeidung unnötiger Schreibarbeit soll bei der Entwicklung der Arbeitsgesetze stets an einen einfachen Belastungsfall gedacht werden, der durch Einzellasten in den Feldmitten gekennzeichnet ist; denn es ist ja ohne weiteres einzusehen, daß verwickelte Belastungsfälle nach denselben Gesetzen zu behandeln sind, nur darf natürlich nicht außer acht gelassen werden, daß das Superpositionsgesetz auch für kleine Formänderungen nicht mehr gilt.

[7]) Haar und Kármán, Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien. Göttinger Nachrichten 1909.

[8]) Hencky, H., Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichtes in plastischen Körpern. ZAMM. 1923.

[9]) Hencky, H., Zur Theorie plastischer Deformationen. ZAMM. 1924.

1. Der Bryansche Energiesatz.

a) Berechnung der elastischen und der plastischen Formänderungsarbeit

Der Bryansche Energiesatz sagt im Bereiche rein elastischer Formänderungen bekanntlich aus, daß der Gleichgewichtslage das Minimum der potentiellen Energie des elastischen Systems zugeordnet ist. Wenn bei einer Verformung die inneren Kräfte die Arbeit B speichern die äußeren Lasten die Arbeit V leisten, berechnet sich die potentielle Energie E der Gleichgewichtslage mit

$$E = E_0 + B - V\,,$$

wobei E_0 die potentielle Energie der Ausgangslage bedeutet. Bei rein elastischen Vorgängen ist die gespeicherte Arbeit B bei der Entlastung zur Gänze rückgewinnbar, sie ist also elastische Energie; bei elastisch-plastischen Verformungen kann bei der Entlastung nur ein Teil der gespeicherten Arbeit zurückgewonnen werden, während der andere Teil, der in der Hauptsache die durch die plastische Verformung bei der Überwindung der inneren Reibung entstandene Erwärmung bedingt, für die Entlastung als verloren anzusehen ist. Bezeichnet man die

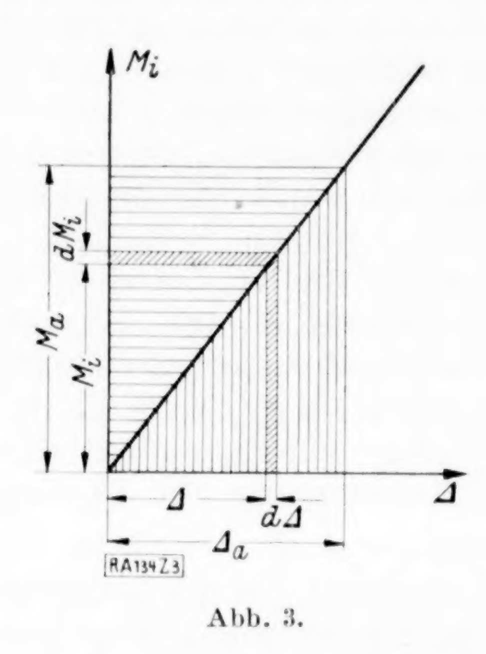


Abb. 3.

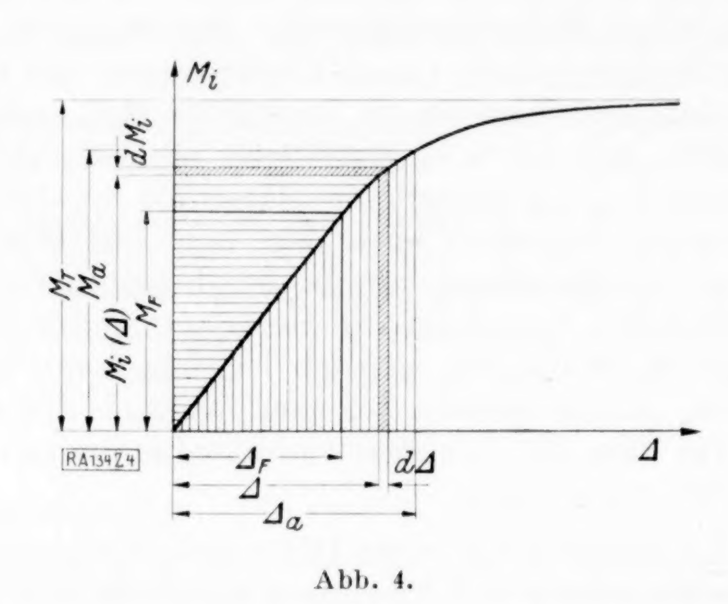


Abb. 4.

elastische, rückgewinnbare Formänderungsarbeit mit A, die verlorene, in Form einer Erwärmung des Balkens in Erscheinung tretende mit F, dann ist bei rein elastischem Verhalten

$$B = A \text{ und } F = 0\,,$$

bei elastisch-plastischem Verhalten

$$B = A + F\,.$$

In der Folge soll von A als elastischer, von F als plastischer und von B als gesamter Formänderungsarbeit gesprochen werden.

Bei einem rein elastischen Vorgange ist der Zusammenhang zwischen M_i und Δ linear und die im Stabelemente von der Länge dx gespeicherte, elastische Formänderungsarbeit dA ist nach Abb. 3

$$dA = \int_0^{M_a} \left(\frac{\Delta}{h}\right) dM_i\,dx = \int_0^{\Delta_a} [M_a - M_i(\Delta)]\,d\left(\frac{\Delta}{h}\right) dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7);$$

sie ist also gleich der in Abb. 3 wagrecht schraffierten Fläche; daß man bei diesem Ansatze für dA überhaupt nur elastische Formänderungsarbeit erfassen kann, folgt daraus, daß ein dM_i nur bei elastischer Verformung entsteht. Die gesamte Formänderungsarbeit dB ist

$$dB = \int_0^{\Delta_a} M_i\,d\left(\frac{\Delta}{h}\right) dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

und ist daher gleich der lotrecht schraffierten Fläche der Abb. 3. Bei rein elastischen Vorgängen ist immer $dA = dB$, und es ist daher in der Statik nicht üblich, irgendeinen Unterschied zwischen den beiden Größen zu machen. Daß es sich dabei aber um grundsätzlich verschiedene Begriffe handelt, ergibt sich aus folgendem: denkt man sich an den rein elastisch verlaufenen Vorgang, bei dem der Verformung Δ ein Wert der inneren Kräfte $M_i = EJ \cdot \frac{\Delta}{h}$ entspricht, plötzlich eine rein plastische Verformung $d\Delta$ hinzugefügt, so wächst B weiter,

nur ist der Zuwachs dB bei der Entlastung nicht mehr rückgewinnbar, während A dabei nicht zunimmt, da der plastische Verformungszuwachs $d\Delta$ kein dM_i auszubilden vermag.

Bei elastisch-plastischen Formänderungsvorgängen ist die Abhängigkeit $M_i(\Delta)$ nur innerhalb $0 < \Delta < \Delta_F$ linear, für $\Delta_F < \Delta < \Delta_a$ gilt für den rechteckigen Querschnitt Gl. (3). Nun ist die Arbeit der inneren Spannungen, bis der Formänderungsvorgang mit Erreichen von Δ_a, wo $M_i = M_a$, zum Stillstande kommt, also die gesamte Formänderungsarbeit dB, Abb. 4,

$$dB = \left[\int_0^{\Delta_F} M_i\, d\left(\frac{\Delta}{h}\right) + \int_{\Delta_F}^{\Delta} M_i\, d\left(\frac{\Delta}{h}\right)\right] dx \quad \text{(9).}$$

Im rein elastischen Gebiete ist

$$M_i = EJ \cdot \frac{\Delta}{h}$$

im elastisch-plastischen

$$M_i = \frac{3}{2}\frac{EJ}{h}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta_F}{\Delta}\right)^2\right]\Delta_F\,;$$

damit bekommt man

$$dB = \left\{\int_0^{\Delta_F} \Delta\, d\Delta + \frac{3}{2}\Delta_F \int_{\Delta_F}^{\Delta}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta_F}{\Delta}\right)^2\right] d\Delta\right\}\frac{EJ}{h^2}\, dx = \frac{1}{2}\frac{M_F^2}{EJ}\left(\frac{\Delta_F}{\Delta} + 3\frac{\Delta}{\Delta_F} - 3\right) dx \quad \text{(10).}$$

Die elastische Formänderungsarbeit dA ist nun nach Abb. 4

$$dA = \left[\int_0^{M_F} dM_i\left(\frac{\Delta}{h}\right) + \int_{M_F}^{M_a} dM_i\left(\frac{\Delta}{h}\right)\right] dx \quad \text{(11),}$$

da ein Spannungszuwachs bei Ausschluß der Verfestigung nur durch den elastischen Formänderungsanteil erzeugt wird; ausgedrückt in Formänderungsgrößen Δ bekommt man

$$dA = \left\{\int_0^{\Delta_F}[M_a - M_i(\Delta)]\, d\left(\frac{\Delta}{h}\right) + \int_{\Delta_F}^{\Delta}[M_a - M_i(\Delta)]\, d\left(\frac{\Delta}{h}\right)\right\} dx \quad \text{(12).}$$

Führt man für M_i die Werte nach (1) und (3) ein und berücksichtigt, daß man nach durchgeführter Integration $M_a = M_i$ setzen kann, so erhält man

$$dA = \left\{\int_0^{\Delta_F}\left[M_a - EJ\cdot\frac{\Delta}{h}\right] d\left(\frac{\Delta}{h}\right) + \int_{\Delta_F}^{\Delta}\left\{M_a - \frac{3}{2}M_F\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta_F}{\Delta}\right)^2\right]\right\} d\left(\frac{\Delta}{h}\right)\right\} dx = \frac{1}{2}\frac{M_F^2}{EJ}\left(3 - 2\frac{\Delta_F}{\Delta}\right) dx \quad \text{(13).}$$

Der wesentlichste Unterschied gegenüber rein elastischer Verformung ist der, daß die elastische Formänderungsarbeit dA einem unüberschreitbaren Werte zustrebt, der die Speicherfähigkeit des Stabelementes dx nach oben abgrenzt; rein elastische Formänderung ermöglicht einen derartigen natürlichen Abschluß dieses Vorganges nicht.

Die plastische Formänderungsarbeit dF ist, solange der Formänderungsvorgang rein elastisch verläuft, gleich Null; erst beim Auftreten von Fließgebieten entsteht ein von Null verschiedener Wert dF, der sich nun aus der Beziehung berechnet, daß

$$dF = dB - dA = \left\{\int_0^{\Delta} M_i(\Delta)\, d\left(\frac{\Delta}{h}\right) - \int_0^{\Delta}[M_a - M_i(\Delta)]\, d\left(\frac{\Delta}{h}\right)\right\} dx = \int_0^{\Delta}[2M_i(\Delta) - M_a]\, d\left(\frac{\Delta}{h}\right) dx \quad \text{(14).}$$

Bei rein elastischen Formänderungen ist bekanntlich

$$\int_0^{\Delta} M_a\, d\left(\frac{\Delta}{h}\right) dx = \frac{M_a}{h}\Delta\, dx = \frac{EJ}{h^2}\Delta^2\, dx\,,$$

$$\int_0^{\Delta} M_i(\Delta)\, d\left(\frac{\Delta}{h}\right) dx = \frac{EJ}{h^2}\int_0^{\Delta}\Delta\, d\Delta = \frac{1}{2}\frac{EJ}{h^2}\Delta^2\, dx\,;$$

damit wird (14) gleich Null. Unter Bezugnahme auf (1) und (3) und Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung $M_a = M_i$ berechnet sich

$$d\,F = \frac{d\,x}{h}\left\{\frac{E\,J}{h}\,\Delta_F + 3\,M_F\left[\Delta + \frac{1}{3}\,\frac{\Delta_F^2}{\Delta}\right]_{\Delta_F}^{\Delta} - \frac{3}{2}\,M_F\,\Delta\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta_F}{\Delta}\right)^2\right]\right\} = \frac{3}{2}\,\frac{M_F^2}{E\,J}\,\frac{\Delta}{\Delta_F}\left(1 - \frac{\Delta_F}{\Delta}\right)^2 d\,x \quad (15).$$

Für $\Delta = \Delta_F$ wird $d\,F = 0$; die Gültigkeit von (15) ist natürlich auf $\Delta > \Delta_F$ zu beschränken.

In der Abb. 5 sind die für einen rechteckigen Querschnitt gültigen Abhängigkeiten der Größen $d(A+F)$ und $d\,A$ für $\Delta = 0$ bis $\Delta = 5\,\Delta_F$ aufgetragen; die plastische Formänderungsarbeit $d\,F$ ist durch Schraffierung hervorgehoben. Gestrichelt ist noch die elastische Formänderungsarbeit $d\,A$ bei rein elastischen Vorgängen in demselben Bereiche von Δ hinzugefügt.

b) Variation der Gleichgewichtslage.

Mit Hilfe der gesamten Formänderungsarbeit $A + F$ läßt sich nun eine wichtige Aussage über den Energieinhalt der bei elastisch-plastischer Verformung eintretenden Gleichgewichtslage machen. In diesem Zusammenhange ist es natürlich nicht mehr am Platze, von potentieller Energie wie bei rein elastischen Vorgängen zu sprechen, da die Verformung nicht mehr umkehrbar verläuft; denn $d\,F$ ist durch den Entlastungsvorgang

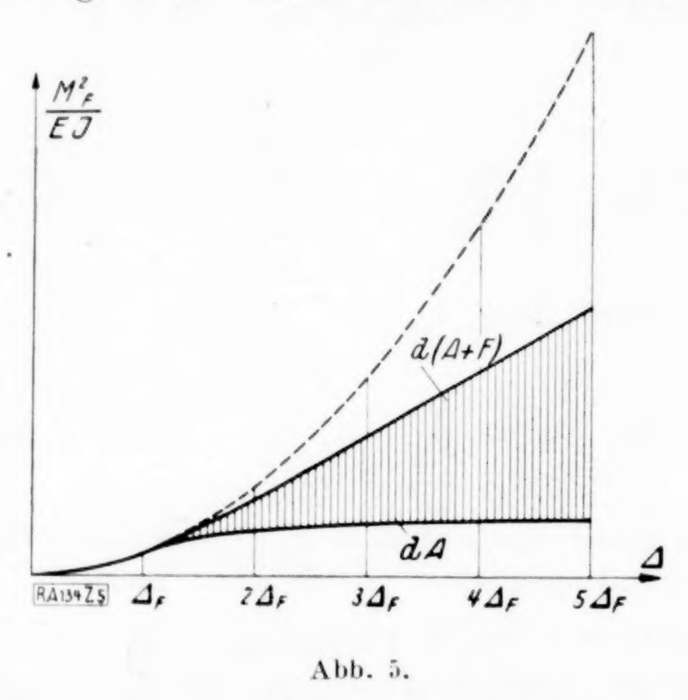


Abb. 5.

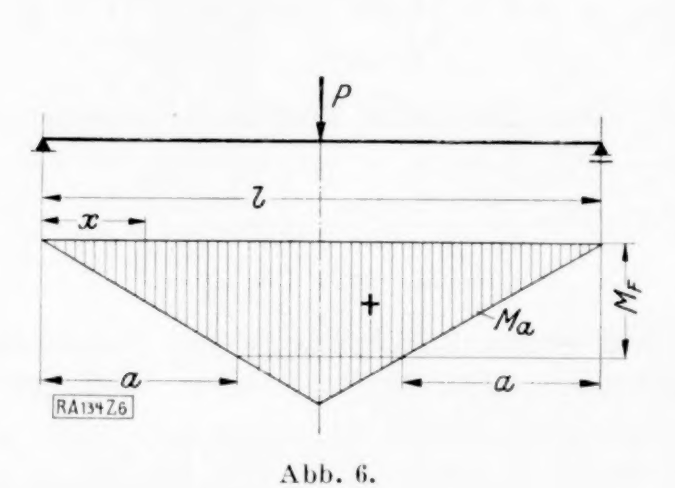


Abb. 6.

nicht mehr zurückzugewinnen. Ist für einen Balken bei gegebener Belastung der Verlauf von M_a bekannt, so ist auf Grund von (3) jedem Werte M_a ein Wert $\left(\frac{\Delta}{h}\right)$ zugeordnet, die ihrerseits bei entsprechender Berücksichtigung der Randbedingungen die Gleichgewichtslage durch die lotrechten Verschiebungen der Stabachse, die Durchbiegungen y festlegen. Die äußeren Lasten bilden mit den Auflagerdrücken und den inneren Spannungen, ausgedrückt durch M_a, eine Gleichgewichtsgruppe. Variiert man nun die Größen $\left(\frac{\Delta}{h}\right)$ um einen beliebigen Betrag $\delta\left(\frac{\Delta}{h}\right)$, wobei allerdings gegenüber rein elastischen Vorgängen die Einschränkung gemacht werden muß, daß $\delta\left(\frac{\Delta}{h}\right)$ eine Vergrößerung von $\left(\frac{\Delta}{h}\right)$ bedeutet, so sind damit auch eindeutig bestimmte Werte von $\delta\,y$ festgelegt; die Werte $\delta\left(\frac{\Delta}{h}\right)$ und $\delta\,y$ bilden eine Verschiebungsgruppe, die nun so klein gewählt werden kann, daß die dabei auftretenden Änderungen der Spannungsgrößen M_a als klein höherer Ordnung vernachlässigt werden können; es ist dabei lediglich zu beachten, daß die durch Variation entstehende neue Lage keine Gleichgewichtslage ist. Es steht nun nichts im Wege, auf die oben beschriebene Gleichgewichtsgruppe und die durch Variation der Gleichgewichtslage gebildete Verschiebungsgruppe das Prinzip der virtuellen Verrückungen anzuwenden; man erhält bei der Länge 1 des Balkens

$$\int_0^l M_a\,\delta\left(\frac{\Delta}{h}\right)d\,x - P\,\delta\,y = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

Da das bestimmte Integral der Gl. (16) nichts anderes vorstellt als $\delta\,B$ und bei einer ausschließlichen Variation der Formänderungsgrößen $P\,\delta\,y = \delta\,V$, bekommt man aus (16)

$$\delta(A + F - V) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Da nun $E_0 + A + F - V$ den Energieinhalt der Gleichgewichtslage zum Ausdruck bringt, folgt zunächst aus (17), daß diese an ein Extrem des Energieinhaltes geknüpft sein muß.

Soll eine Gleichgewichtslage stabil sein, dann muß ebenso wie bei rein elastischen Zuständen

$$\delta^2 (A + F - V) > 0 \quad \ldots \quad (18),$$

da der Energieinhalt der variierten Lage gegenüber der Gleichgewichtslage einen Überschuß aufweisen muß, der nach Aufhören der Störung die teilweise Zurückführung ermöglicht. Bei rein elastischen Formänderungen und unbegrenzter Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes wird bei der Biegung die Grenze der Stabilität niemals erreicht. Anders bei elastisch-plastischen Formänderungen; da besteht eine gewisse Belastung P, für die

$$\delta^2 (A + F - V) = 0 \quad \ldots \quad (19)$$

wird. Diese Belastung ist natürlich nichts anderes als die Tragfähigkeit, die ja durch den Übergang des stabilen Tragwerkes in eine labile Form gekennzeichnet war.

Für den einfachen Belastungsfall des Balkens mit einer Einzellast in der Feldmitte (Abb. 6) wird der elastische Bereich durch $0 < x < a$ und der elastisch-plastische durch $a < x < \frac{l}{2}$ begrenzt, wobei $\frac{P}{2} a = M_F$ oder $a = \frac{2 M_F}{P}$ ist; das Prinzip der virtuellen Verrückungen ergibt nun mit Hilfe von (1) und (3)

$$\frac{2 E J}{h^2} \left[\int_0^a \Delta\, \delta \Delta\, d x + \frac{1}{2} \Delta_F \int_a^{l/2} \left\{ 3 - \left(\frac{\Delta_F}{\Delta} \right)^2 \right\} \delta \Delta\, d x \right] - P\, \delta y_m = 0 .$$

Beachtet man, daß nach (10)

$$A + F = \frac{E J}{h^2} \left[\int_0^a \Delta^2 d x + \Delta_F^2 \int_a^{l/2} \left(\frac{\Delta_F}{\Delta} + 3 \frac{\Delta}{\Delta_F} - 3 \right) d x \right],$$

so erhält man durch Differentiation

$$\delta (A + F) = \frac{E J}{h^2} \left[\int_0^a 2 \Delta\, \delta \Delta\, d x + \Delta_F^2\, \delta a + \Delta_F^2 \int_a^{l/2} \left(- \frac{\Delta_F}{\Delta^2} + \frac{3}{\Delta_F} \right) \delta \Delta\, d x - \Delta_F^2\, \delta a \right]$$

$$= \frac{2 E J}{h^2} \left[\int_0^a \Delta\, \delta \Delta\, d x + \frac{1}{2} \Delta_F \int_a^{l/2} \left\{ 3 - \left(\frac{\Delta_F}{\Delta} \right)^2 \right\} \delta \Delta\, d x \right],$$

womit Gl. (17) auch durch Rechnung nachgewiesen ist.

Nach nochmaliger Differentiation ergibt sich

$$\delta^2 (A + F) = \frac{E J}{h^2} \left[\int_0^a (\delta \Delta)^2 d x + \int_a^{l/2} \left(\frac{\Delta_F}{\Delta} \right)^3 (\delta \Delta)^2 d x \right] \text{ und } \delta^2 V = 0 .$$

Da Δ_F immer das Vorzeichen von Δ haben muß, ist ersichtlich, daß für einen willkürlichen Wert von $\delta \Delta$ die 2. Variation des Energieinhaltes der Gleichgewichtslage niemals negativ werden kann.

c) Berechnung der Tragfähigkeit mit Hilfe des Bryanschen Energiesatzes.

Läßt sich nur eine einzige virtuelle Verrückung $\delta \Delta$ angeben, für die Gl. (19) erfüllt ist, dann ist damit der Nachweis der Instabilität der Gleichgewichtslage erbracht und damit auch die Möglichkeit gegeben, die Tragfähigkeit des Balkens bei gegebener Belastung zu berechnen. Für den Belastungsfall P in der Balkenmitte war

$$\delta^2 (A + F - V) = \frac{E J}{h^2} \left[\int_0^a (\delta \Delta)^2 d x + \int_a^{l/2} \left(\frac{\Delta_F}{\Delta} \right)^3 (\delta \Delta)^2 d x \right] \quad \ldots \quad (20),$$

daraus ist bereits eine virtuelle Verrückung zu erkennen, für die sich Gl. (19) erfüllen läßt; setzt man $\delta \Delta$ überall gleich Null mit Ausnahme der Stelle des Lastangriffes, dort $\delta \Delta$ gleich

einem beliebigen Werte c, so besteht die virtuell verformte Stabachse aus 2 geraden Stücken, die im Lastangriffspunkte unter einem beliebigen Winkel zusammengefügt sind. Damit wird

$$\delta^2 (A + F - V) = \frac{E J}{h^2} c^2 \int \sqrt{\left(3 - \frac{P l}{2 M_F}\right)^3} \, d x .$$

Der Ausdruck wird Null für $3 - \frac{P l}{2 M_F} = 0$ oder für

$$P = P_T = \frac{6 M_F}{l} \quad \ldots \quad (21).$$

Das ist die Tragfähigkeit des Balkens bei der angenommenen Belastung. Für $P < P_T$ ist die ausgebogene Lage stabil, bei $P = P_T$ tritt der Stabilitätswechsel auf, für $P > P_T$ ist ein stabiles Gleichgewicht nicht mehr möglich (Abb. 7).

Bei einer gleichmäßig verteilten Vollbelastung ist im Bereiche elastisch-plastischer Formänderungen

$$\frac{\Delta_F}{\Delta} = \sqrt{3 - \frac{p x (l - x)}{M_F}},$$

damit bei derselben virtuellen Verrückung wie oben

$$\delta^2 (A + F - V) = \frac{E J}{h^2} c^2 \int \sqrt{\left(3 - \frac{p l^2}{4 M_F}\right)^3} \, d x .$$

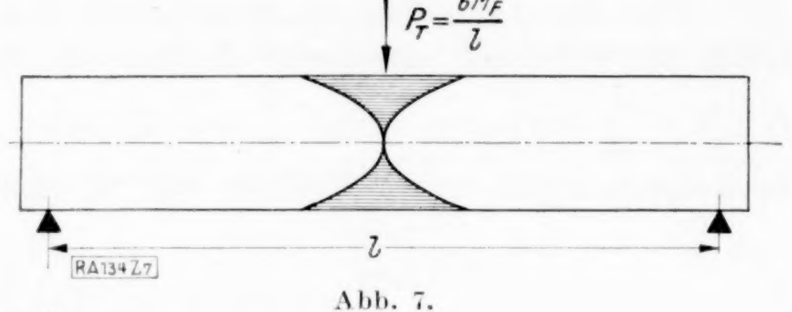


Abb. 7.

Die Grenze der Stabilität wird erreicht für $3 - \frac{p l^2}{4 M_F} = 0$ oder

$$p = p_T = \frac{12 M_F}{l} \quad \ldots \quad (22).$$

Die Aufgabe der Ermittlung der Tragfähigkeit ist daher ein Stabilitätsproblem, sie ist diejenige Belastung, bei der das Gleichgewicht zwischen den inneren Spannungen der Gleichgewichtslage und den äußeren Kräften labil wird. Aus dem Spannungsproblem bei der Biegung bei rein elastischen Formänderungen wird bei Berücksichtigung der plastischen Formänderungen nach Abb. 1 ein Stabilitätsproblem und damit unmittelbar ein Festigkeitsproblem.

2. Der Satz von Castigliano.

a) Berechnung der elastischen und der plastischen Formänderungsarbeit, ausgedrückt in Spannungsgrößen.

Bisher wurde die elastische Formänderungsarbeit $d A$ durch die Formänderungsgrößen Δ_a der Gleichgewichtslage ausgedrückt; er kann aber auch in den Spannungsgrößen der Gleichgewichtslage angeschrieben werden. Mit Rücksicht auf die folgenden Anwendungen soll von A lediglich der Anteil berechnet werden, der von den Momenten der äußeren Kräfte geleistet wird. Ist überall $M_a < M_F$, ist der Vorgang rein elastisch und daher nach Abb. 3

$$d A = \int_0^{M_a} \left(\frac{\Delta}{h}\right) d M_i \, d x = \int_0^{M_a} \frac{M_i}{E J} \, d M_i \, d x = \frac{1}{2} \frac{M_a^2}{E J} \, d x \quad \ldots \quad (23).$$

Ist $M_F < M_a < M_T$, treten bleibende Verformungen auf und es berechnet sich die elastische Formänderungsarbeit $d A$ nach (11) mit

$$\left.\begin{aligned} d A &= \int_0^{M_a} \left(\frac{\Delta}{h}\right) d M_i \, d x = \left[\int_0^{M_F} \frac{M_i}{E J} \, d M_i \, d x + \int_{M_F}^{M_a} \frac{M_F}{E J} \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{2 M_i}{M_F}}} \, d M_i\right] d x \\ &= \frac{1}{2} \frac{M_F^2}{E J} \left[3 - 2 \sqrt{3 - \frac{2 M_a}{M_F}}\right] d x \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (24).$$

Für $M_a = M_T$, dem Grenzwerte, dem bei unendlich großen Randfaserdehnungen die inneren Spannungen gerade noch Gleichgewicht halten können, erreicht $d A$ einen beim ideal plastischen Körper unüberschreitbaren Höchstwert mit

$$d A (M_T) = \frac{3}{2} \frac{M_F^2}{E J} \quad \ldots \quad (25).$$

In ganz ähnlicher Weise läßt sich auch die plastische Formänderungsarbeit F in Spannungsgrößen ausdrücken; man bekommt nach (15) mit

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{A_F} &= \frac{1}{\sqrt{3-\dfrac{2\,M_a}{M_F}}} \\ d\,F &= \frac{3\,M_F^2}{E\,J}\left[\frac{2\,M_F - M_a}{M_F\sqrt{3-\dfrac{2\,M_a}{M_F}}} - 1\right] d\,x \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26).$$

Berechnet man die elastische Formänderungsarbeit für den früher bereits untersuchten einfachen Balken von der Länge l, der mit P in der Balkenmitte belastet ist, so ist $M_a = \frac{P}{2}\,x$. Für den rein elastischen Vorgang bekommt man nach (23)

$$A = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_a^2}{E\,J}\,d\,x = \frac{P^2\,l^3}{96\,E\,J} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Ist $M_F < M_a < M_T$, dann tritt ein Fließgebiet von der Länge $l - 2\,a$ auf und es ergibt sich mit (24) (Abb. 6)

$$A = \frac{P^2}{4\,E\,J}\int_0^a x^2\,d\,x + \frac{M_F^2}{E\,J}\left[3\left(\frac{l}{2}-a\right) - 2\int_a^{l/2}\sqrt{\left(3-\frac{P}{M_F}\,x\right)}\,d\,x\right].$$

mit $a = \frac{2\,M_F}{P}$ berechnet sich nun

$$A = \frac{3}{2}\,\frac{M_F^2}{E\,J}\left\{l + \frac{8}{9}\,\frac{M_F}{P}\left[\sqrt{\left(3-\frac{P\,l}{2\,M_F}\right)^3} - 5\right]\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Zur Überprüfung dieses Ausdruckes kann untersucht werden, ob sich der Wert (28) an den rein elastischen Wert (27) anschließt. Setzt man max $M_a = M_F$, so ist damit die Last P_F bestimmt, bei der die Randspannung den Wert σ_F erreicht; es ist $P_F = \frac{4\,M_F}{l}$ und damit der Ausdruck unter der Wurzel $3 - \frac{P_F\,l}{2\,M_F} = 1$; nun wird

$$A\,(P_F) = \frac{1}{96}\,\frac{P_F^2\,l^3}{E\,J} = \frac{1}{6}\,\frac{M_F^2\,l}{E\,J}.$$

Die größte, im Balken bei der gegebenen Belastung aufspeicherbare elastische Formänderungsarbeit ist

$$A\,(P_T) = \frac{7}{18}\,\frac{M_F^2\,l}{E\,J} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

Für denselben Belastungsfall berechnet sich die plastische Formänderungsarbeit F nach (26) mit

$$F = \frac{2\,M_F^3}{P\,E\,J}\left[\left(10 - \frac{3\,P\,l}{2\,M_F}\right) - \left(6 - \frac{1}{2}\,\frac{P\,l}{M_F}\right)\sqrt{3-\frac{P\,l}{2\,M_F}}\right] \quad \ldots \ldots \quad (30),$$

es ist $F\,(P_F) = 0$, der Wert von F an der Grenze der Stabilität ist

$$F\,(P_T) = \frac{1}{3}\,\frac{M_F^2\,l}{E\,J} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31).$$

In der Abb. 8 ist der Verlauf der Werte A, F in Abhängigkeit von der Belastungssteigerung bis zu $P_T = \frac{6\,M_F}{l}$ dargestellt.

b) Variation der Spannungsgrößen.

Aus der elastischen Formänderungsarbeit A, ausgedrückt in Spannungsgrößen, läßt sich nun ähnlich wie bei rein elastischen Vorgängen ein wichtiger Satz entwickeln, der eine Klärung und Weiterführung der Berechnung elastisch-plastisch verformter Tragwerke ermöglicht. Er knüpft wieder an das Prinzip der virtuellen Verrückungen an. Denkt man sich den Balken von der Länge l statt mit der Last P selbst mit einer sehr kleinen Änderung δP

dieser Last belastet, so entstehen im Inneren des Balkens Spannungen, die sich in jedem Querschnitte zu Momenten δM_a zusammenfassen lassen. δP bildet mit den zugehörigen Auflagerdrücken und beliebig vielen Werten δM_a eine Gleichgewichtsgruppe. Die durch Belastung des Balkens mit $P_F < P < P_T$ bedingten Winkeländerungen der Stabelemente $\frac{\Delta}{h}\,dx$ bilden eine Verschiebungsgruppe, die bei gegebenen Randbedingungen auch die lotrechten Verschiebungen y aller Punkte der Stabachse festlegt. Auf Grund des Prinzipes der virtuellen Verrückungen kann man nun obige Gleichgewichtsgruppe mit der durch die Belastung P gegebenen Verschiebungsgruppe zusammenfassen und man erhält

$$\delta P \cdot y - \int_0^l \delta M_a \left(\frac{\Delta}{h}\right) dx = 0 \quad \ldots\ldots \quad (32).$$

Beachtet man, daß das bestimmte Integral der Gl. (32) nichts anderes vorstellt als δA bei Variation der Spannungsgrößen, so ergibt sich

$$\delta P \cdot y - \delta A = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\delta A}{\delta P} \quad \ldots\ldots \quad (33).$$

Das ist der Satz von Castigliano, der im Bereiche rein elastischer Formänderungen gut bekannt ist und der nun auch auf elastisch-plastische Formänderungen übertragen werden kann.

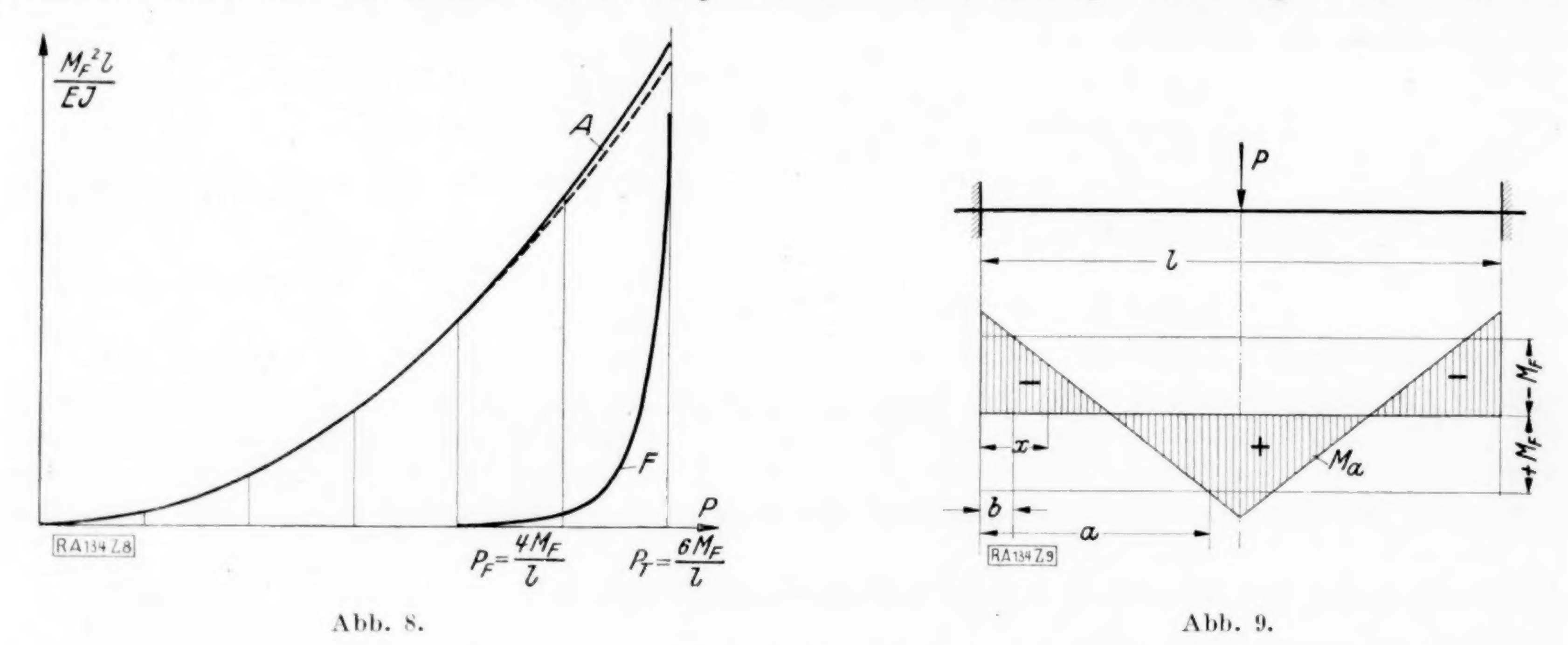


Abb. 8. Abb. 9.

Für den Belastungsfall P in der Feldmitte (Abb. 6) ändert sich bei einer Vergrößerung von P um δP das Moment der angreifenden Kräfte M_a um $\delta M_a = \frac{\delta P}{2} \cdot x$, $a = \frac{2 M_F}{P}$ um δa; es ist $a + \delta a = \frac{2 M_F}{P + \delta P} = \frac{2 M_F}{P}\left(1 - \frac{\delta P}{P}\right)$, folglich $\delta a = -\frac{2 M_F}{P^2}\,\delta P$; die elastische Formänderungsarbeit A ist nach (24)

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^a \frac{M_a^2}{EJ}\,dx + \frac{1}{2}\frac{M_F^2}{EJ}\int_a^{l/2}\left(3 - 2\sqrt{3 - \frac{2 M_a}{M_F}}\right)dx\right] \quad \ldots\ldots \quad (34),$$

sie erhöht sich bei der angenommenen Belastungsänderung auf

$$A + \delta A = \int_0^{a+\delta a} \frac{(M_a + \delta M_a)^2}{EJ}\,dx + \frac{M_F^2}{EJ}\int_{a+\delta a}^{l/2}\left(3 - 2\sqrt{3 - \frac{2(M_a + \delta M_a)}{M_F}}\right)dx$$

$$= \int_0^{a+\delta a} \frac{M_a^2}{EJ}\left(1 + \frac{2\,\delta M_a}{M_a}\right)dx + \frac{M_F^2}{EJ}\int_{a+\delta a}^{l/2}\left[3 - 2\sqrt{3 - \frac{2 M_a}{M_F}}\left(1 - \frac{\delta M_a}{M_F\left(3 - \frac{2 M_a}{M_F}\right)}\right)\right]dx;$$

daraus berechnet sich nun

$$\delta A = 2\left[\int_0^a \frac{M_a\,\delta M_a}{EJ}\,dx + \frac{M_F}{EJ}\int_a^{l/2} \frac{\delta M_a}{\sqrt{3 - \frac{2 M_a}{M_F}}}\,dx\right] \quad \ldots\ldots \quad (35).$$

Berücksichtigt man jetzt die Gl. (1) und (4), so geht (35) über in

$$\delta A = 2\left[\int_0^a \delta M_a \left(\frac{A}{h}\right) dx + \int_a^{l/2} \delta M_a \left(\frac{A}{h}\right) dx = \int_0^l \delta M_a \left(\frac{A}{h}\right) dx\,,\right.$$

womit die Richtigkeit von (33) auch unmittelbar gezeigt ist.

Mit Hilfe von (33) kann man nun die Durchbiegung des Balkens unter der Last P in der Feldmitte berechnen; man erhält aus (28)

$$\frac{\delta A}{\delta P} = y_m = \frac{M_F^3}{3\,P^2\,EJ}\left[20 - \left(12 + \frac{P\,l}{M_F}\right)\sqrt{3 - \frac{P\,l}{2\,M_F}}\right] \quad \ldots \quad (36).$$

Es zeigt sich, daß y_m nur so lange reell ist, als $P < P_T$, solange daher eine stabile Gleichgewichtslage besteht.

Seine hauptsächlichste Verwendung findet aber der Satz von Castigliano zur Berechnung der überzähligen Größen X bei statisch unbestimmten Systemen; variiert man eine statisch unbestimmte Größe X um den Betrag δX, so muß, da der Spannungszustand mit δX allein ein sogenannter Selbstspannungszustand ist,

$$\frac{\delta A}{\delta X} = 0 \quad \ldots \quad (37).$$

Diese Bedingung kann so oft angesetzt werden, als statisch unbestimmte Größen vorhanden sind; man bekommt damit eine Anzahl von Gleichungen zwischen den Größen X und den äußeren Lasten P, die die ersteren eindeutig festlegen. Daß im allgemeinen Falle dieses Gleichungssystem nicht linear ist, bedarf keiner weiteren Begründung. Nach Ermittlung der Überzähligen X ist der Momentenverlauf im Tragwerk und damit auch die Verteilung der Längsspannungen und die Grenzen der Fließgebiete festgelegt.

c) Der beiderseits eingespannte Balken.

Als Beispiel soll zunächst der beiderseits eingespannte Balken mit der Last P in der Feldmitte behandelt werden, Abb. 9. Nach (24) ist

$$A = 2\left\{\frac{1}{2}\frac{M_F^2}{EJ}\int_0^b\left(3 - 2\sqrt{3 - \frac{2\,M_a}{M_F}}\right)dx + \frac{1}{2}\int_b^a \frac{M_a^2}{EJ}\,dx + \frac{1}{2}\frac{M_F^2}{EJ}\int_a^{l/2}\left(3 - 2\sqrt{3 - \frac{2\,M_a}{M_F}}\right)dx\right\}.$$

Daraus berechnet sich nun die erste Variation von A mit

$$\delta A = \frac{2\,M_F}{EJ}\int_0^b \frac{\delta M_a}{\sqrt{3 - \frac{2\,M_a}{M_F}}}\,dx + 2\int_b^a \frac{M_a\,\delta M_a}{EJ}\,dx + \frac{2\,M_F}{EJ}\int_a^{l/2}\frac{\delta M_a}{\sqrt{3 - \frac{2\,M_a}{M_F}}}\,dx \quad \ldots \quad (38)$$

Berücksichtigt man, daß $M_a = \frac{P}{2}x - X$, $\delta M_a = -\delta X$, so ist nach dem Satze von Castigliano

$$-\frac{\delta A}{\delta X} = -\frac{2\,M_F}{EJ}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{3 - \frac{2\,X}{M_F} + \frac{P}{M_F}x}} + \frac{2}{EJ}\int_b^a\left(\frac{P}{2}x - X\right)dx + \frac{2\,M_F}{EJ}\int_a^{l/2}\frac{dx}{\sqrt{3 + \frac{2\,X}{M_F} - \frac{P}{M_F}x}} = 0\,,$$

daraus folgt

$$-\frac{2\,M_F^2}{P}\left[1 - \sqrt{3 - \frac{2\,X}{M_F}} + \sqrt{3 + \frac{2\,X}{M_F} - \frac{P\,l}{2\,M_F}} - 1\right] = 0$$

und es ergibt sich

$$X = \frac{P\,l}{8} \quad \ldots \quad (39),$$

das ist ein Ergebnis, das mit Rücksicht auf die Symmetrie von M_a nicht überraschen kann.

Die 2. Variation von A bekommt man durch nochmalige Differentiation von (38) mit

$$\delta^2 A = \frac{1}{EJ}\left\{\int_0^b \frac{(\delta M_a)^2}{\sqrt{\left(3-\frac{2M_a}{M_F}\right)^3}}\,dx + \int_b^a (\delta M_a)^2\,dx + \int_a^{l/2} \frac{(\delta M_a)^2}{\sqrt{\left(3-\frac{2M_a}{M_F}\right)^3}}\,dx\right\} \quad . \; . \; . \quad (40)$$

und mit $\delta M_a = -\delta X$

$$\frac{\delta^2 A}{(\delta X)^2} = \frac{2M_F}{PEJ}\left[\frac{1}{\sqrt{3-\frac{2X}{M_F}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\frac{2X}{M_F}-\frac{Pl}{2M_F}}}\right].$$

Mit dem Werte für $X = \frac{Pl}{8}$, der nach (39) auch bei elastisch-plastischen Formänderungen seine Gültigkeit behält, wird

$$\frac{\delta^2 A}{(\delta X)^2} = \frac{4M_F}{PEJ}\,\frac{1}{\sqrt{3-\frac{Pl}{4M_F}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41).$$

Der Ausdruck ist ständig positiv und man erkennt daraus, daß genau so wie bei rein elastischen Formänderungen die statisch unbestimmte Größe die elastische Formänderungsarbeit zu einem Minimum macht. Für $P \leq P_F = \frac{8M_F}{l}$ wird der Verformungsvorgang rein elastisch, der Wert unter der Wurzel wird gleich l und (41) geht in den für elastische Formänderungen gültigen Wert $\frac{\delta^2 A}{(\delta X)^2} = \frac{l}{2EJ}$ über; für $P = P_T = \frac{12M_F}{l}$ wird

$$\frac{\delta^2 A}{(\delta X)^2} = \infty \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42).$$

Da für $P = P_T$ die statisch unbestimmte Größe $X = \frac{3}{2}M_F$ wird, sagt Gl. (42) nichts anderes aus, als daß der unüberschreitbare Wert $X = M_T$ die 2. Variation der Formänderungsarbeit A unendlich groß werden läßt, was auf eine Singularität von $A(X, P)$ hinweist; sie ist ein Kennzeichen dafür, daß das betrachtete statisch unbestimmte Tragwerk nun in ein solches von geringerer statischer Unbestimmtheit übergeht, daß sich das zu X zugehörige Bauglied beim Fortschreiten des Formänderungsvorganges von der Spannungsaufnahme ausschließt (Abb. 10).

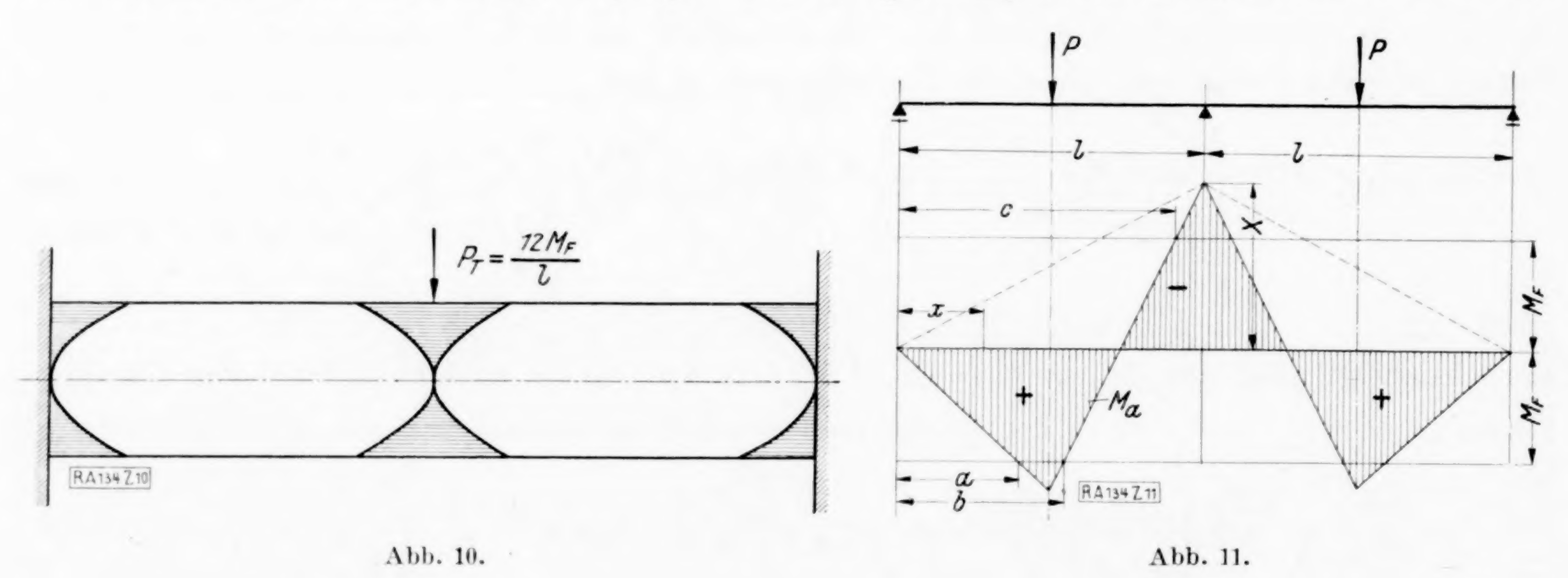


Abb. 10. Abb. 11.

d) Der über 3 Stützen durchlaufende Balken.

Betrachtet man nun einen einfach statisch unbestimmten, über 3 Stützen durchlaufenden Träger mit einer Belastung nach Abb. 11, tritt, sowie X den Wert M_F übersteigt, über der Stütze innerhalb der Grenzen $c < x < l$ ein erstes Fließgebiet auf, wobei sich c aus der Bedingung berechnet, daß

$$\frac{Pl}{2} - \frac{c}{2l}(Pl + 2X) = -M_F,$$

woraus
$$c = \frac{l(Pl + 2M_F)}{Pl + 2X}.$$

Damit berechnet sich nach (35)

$$\delta A = \frac{2}{EJ}\left[\int_0^{l/2} M_a\,\delta M_a\,d x + \int_{l/2}^{c} M_a\,\delta M_a\,d x + M_F\int_c^l \frac{\delta M_a}{\sqrt{3-\frac{2 M_a}{M_F}}}\,d x\right].$$

Da $\delta M_a = -\frac{x}{l}\,\delta X$, ergibt sich mit (37) nach einigem Umrechnen

$$\left.\begin{aligned}&(Pl-2X)(Pl+2X)^2+3Pl\left[4(Pl+2M_F)^2-(Pl+2X)^2\right]-\left[8(Pl+2M_F)^3-(Pl+2X)^3\right]\\&\quad+32M_F^3\left[\left(6+\frac{3Pl+2X}{M_F}\right)\sqrt{3-\frac{2X}{M_F}}-\left(8+\frac{3Pl}{M_F}\right)\right]=0\end{aligned}\right\}\;(43).$$

Gl. (43) bestimmt den Zusammenhang zwischen X und P, solange $X > M_F$ und $M_a\left(\frac{l}{2}\right) < M_F$ ist, solange daher ein einziges, plastisch verformtes Gebiet innerhalb einer Öffnung auftritt; sie schließt sich an die bei rein elastischen Formänderungen bis zu $X = M_F$ gültige Beziehung $X = \frac{3\,Pl}{16}$ an, denn für $X = M_F$ geht (43) über in $(Pl - 2X)(Pl + 2X)^2 + 9\,Pl\,(Pl + 2X)^2 - 7\,(Pl + 2X)^3 = 0$; daraus folgt nach kurzer Rechnung $X = \frac{3\,Pl}{16}$. Der Wert von $P = P_F$, der den elastischen Bereich abschließt, ist damit $P_F = \frac{16\,M_F}{3\,l}$. Für $M_a\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4} - \frac{X}{2} = M_F$ erreicht Gl. (43) die Grenze ihrer Gültigkeit; daher ist für $X_2 = \frac{Pl}{2} - 2\,M_F$ der größte Wert von $P = P_2$ bestimmt, der noch aus (43) berechnet werden darf. Mit $X = X_2$ gewinnt man aus (43) eine Gleichung zur Berechnung von P_2 mit

$$(P_2 l - 2 M_F)^2 - 6\,P_2\,l\,M_F - 24\,M_F^2 + 4\,M_F\,(2\,P_2\,l + M_F)\sqrt{7-\frac{P_2 l}{M_F}} = 0 \quad . \quad . \quad (44).$$

Für $P > P_2$ treten auch in den Feldmitten Fließgebiete hinzu, die durch $a < x < b$ begrenzt sind; es ist

$$a = \frac{2\,l\,M_F}{Pl - 2X}, \qquad b = \frac{l\,(Pl - 2\,M_F)}{Pl + 2X}.$$

Mit $\delta M_a = -\frac{x}{l}\,\delta X$ liefert der Castigliano sche Satz

$$\begin{aligned}-\frac{\delta A}{\delta X} = \frac{2}{EJl}\Bigg\{&\int_0^a \frac{Pl-2X}{2l}\,x^2\,dx + M_F\int_a^{l/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{3-\frac{Pl-2X}{M_F l}\,x}} + M_F\int_{l/2}^{b}\frac{x\,dx}{\sqrt{3-\frac{Pl}{M_F}+\frac{Pl+2X}{M_F l}\,x}}\\&+\int_b^c\left[\frac{Pl}{2}-\frac{x}{2l}(Pl+2X)\right]x\,dx - M_F\int_c^l\frac{x\,dx}{\sqrt{3+\frac{Pl}{M_F}-\frac{Pl+2X}{M_F l}\,x}}\Bigg\} = 0\end{aligned}$$

und daraus nach einigem Umrechnen als Beziehung $X(P)$ für $P > P_2$

$$\begin{aligned}&10\,\frac{(Pl+2X)^2}{(Pl-2X)^2} - 20 + \left(6+\frac{3\,Pl+2X}{M_F}\right)\sqrt{3-\frac{2X}{M_F}}\\&-\left[\frac{(Pl+2X)^2}{(Pl-2X)^2}\left(\frac{Pl-2X}{2\,M_F}+6\right)+\left(\frac{5\,Pl+2X}{2\,M_F}-6\right)\right]\sqrt{3-\frac{Pl}{2\,M_F}+\frac{X}{M_T}} = 0 \quad . \quad . \quad (45).\end{aligned}$$

Für $X_2 = \frac{Pl}{2} - 2\,M_F$ geht Gl. (45) in Gl. (44) über. Mit dem Größtwert von $X = M_F$ ist wieder der Gültigkeitsbereich von (45) erschöpft, da für eine weitere Steigerung der Belastung die steife Ecke über der Mittelstütze unwirksam wird und folglich dort eine Änderung der Randbedingung auftritt, die die Benutzung des Satzes von Castigliano in der Form (37) nicht

mehr zuläßt. Um den zu $X = M_T$ gehörigen Wert von $P = P_3$ zu berechnen, hat man in Gl. (45) $X = M_T$ zu setzen und man bekommt als Gleichung für P_3

$$10\,M_F(P_3^2\,l^2 - 18\,P_3\,l\,M_F + 9\,M_F^2) + 3\,P_3\,l\,(P_3^2\,l^2 - 4\,P_3\,l\,M_F + 27\,M_F^2)\sqrt{\frac{1}{2}\left(9 - \frac{P_3\,l}{M_F}\right)} = 0 \quad . \quad (46).$$

Mit Erreichen von P_3 ist die Kontinuität der beiden Öffnungen erloschen; für eine weitere Steigerung der Belastung $P > P_3$ wirkt das Tragwerk wie 2 nebeneinander liegende, einfache Balken mit dem unveränderlichen Endmoment $X = M_T$ über der Mittelstütze. Die Instabilität der Gleichgewichtslage tritt auf, wenn $M_m = \frac{P\,l}{4} - \frac{X}{2} = M_T$; dann werden auch die steifen Ecken in Feldmitten unwirksam. Bezeichnet man die Laststeigerung, die der einfache Balken bis zum Eintreten der Instabilität noch aufnehmen kann, mit ΔP, so muß

$$\Delta P = \frac{1}{l}\,(9\,M_F - P_3\,l) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47).$$

Die Gl. (47) läßt auch erkennen, daß

$$P_3 + \Delta P = P_T = \frac{9\,M_F}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48),$$

das ist die Grenzlast, bei der das Tragvermögen des durchlaufenden Balkens erschöpft ist.

Eine explizite Darstellung der Zusammenhänge $X(\boldsymbol{P})$ nach Gl. (43) bzw. (45) ist praktisch nicht mehr möglich; mit Hilfe der Newtonschen Näherungsmethode wird man aber immer rasch zu jedem, innerhalb der angegebenen Grenzen willkürlich gewählten Werte $\boldsymbol{P}$ den zugehörigen Wert X damit berechnen können. Um eine Vorstellung über den Zusammenhang $X(P)$ zu gewinnen, wurden für ein besonderes Beispiel zahlenmäßig die Werte $\boldsymbol{P}_F$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ und $\boldsymbol{P}_T$ bestimmt. Da Versuche zur Ermittlung der Tragfähigkeit von durchlaufenden Balken mit rechteckigem Querschnitte nicht vorliegen, sondern lediglich die von E. Meyer für den einfachen Balken, war die Nachrechnung von Versuchen zur Überprüfung der Rechnungsergebnisse nicht möglich. Es wurden die Verhältnisse des Meyerschen Versuches auf den vorliegenden Fall übertragen; mit $b = 5$ cm, $h = 10$ cm, $l = 120$ cm, $\sigma_F = 3000$ kg/cm² berechnet sich $M_F = 250000$ kgcm; für $X = M_F$ ist also $P_F = 11100$ kg. Aus (44) berechnet sich der Wert $P = P_2$, bei dem gerade ein 2. und 3. Fließgebiet in den Feldmitten beginnt mit $P_2 = 13340$ kg; der zugehörige Wert X_2 ist $X_2 = \frac{P_2\,l}{2} - 2\,M_F = 300640$ kgcm. Aus (46) ergibt sich

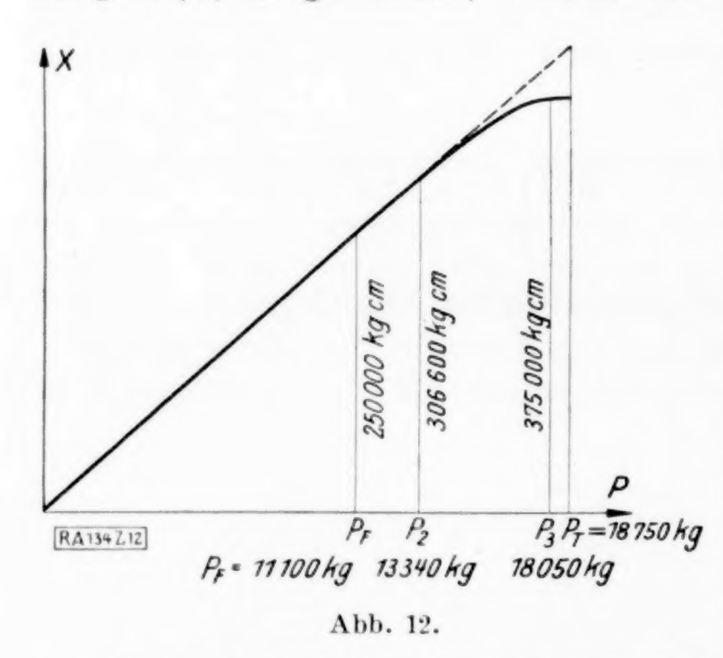


Abb. 12.

$P_3 = 18050$ kg mit dem zugehörigen Werte $X_3 = \frac{3}{2}\,M_F = 375000$ kgcm; bei $P_T = \frac{9\,M_F}{l} = 18750$ kg ist das Tragvermögen erschöpft. Zwischenwerte aus den Gl. (43) bzw. (45) wurden nicht berechnet; in der Abb. 12 ist der Zusammenhang $X(P)$ für dieses Beispiel dargestellt; er läßt erkennen, daß kleine Abweichungen vom Hookeschen Gesetz nur unwesentliche Änderungen der Formänderung gegenüber rein elastischem Verhalten mit sich bringen.

e) Einfluß von Stützensenkungen.

Von großer Bedeutung ist das Verhalten des durchlaufenden Trägers bei Stützensenkungen. Sowohl durch Überlegung, als auch durch Versuche[10]) ist gezeigt worden, daß ein Einfluß von Stützensenkungen auf die Tragfähigkeit bei elastisch-plastischer Verformung nicht besteht; sie beeinflussen lediglich den Verlauf des Vorganges uud bewirken größere Randfaserdehnungen in den Fließgebieten; gefährliche Stützensenkungen wären demnach nur durch Begrenzung der Randfaserdehnungen auf ein bestimmtes Maß auszuschalten.

Eine Senkung der Mittelstütze kann zunächst bewirken, daß der Größtwert des Momentes M_a in den Feldmitten auftritt, so daß die ersten Fließgebiete jedenfalls auch dort entstehen, während das Fließgebiet über der Mittelstütze sich erst später ausbilden wird. Beträgt die Senkung der Mittelstütze δ cm, so ist die Winkeländerung im Stützenquerschnitte am durch-

[10]) Maier-Leibnitz, Beitrag zur Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit einfacher und durchlaufender Balkenträger aus Baustahl St 37 und aus Holz. Die Bautechnik 1928.

geschnittenen Tragwerke $\frac{2\delta}{l}$ und der Satz von Castigliano liefert nun unter der Annahme, daß sowohl in den Feldmitten als auch über der Stütze Fließgebiete entstanden sind

$$\frac{\delta A}{\delta x} = -\frac{2}{EJl}\left\{\int_0^a \frac{Pl-2X}{2l} x^2\,dx + M_F \int_a^{l/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{3-\frac{Pl-2X}{M_F l}x}} + M_F \int_{l/2}^{b} \frac{x\,dx}{\sqrt{3-\frac{Pl}{M_F}+\frac{Pl+2X}{M_F l}x}}\right.$$

$$\left. + \int_b^c \left[\frac{Pl}{2}-\frac{x}{2l}(Pl+2X)\right] x\,dx - M_F \int_c^l \frac{x\,dx}{\sqrt{3+\frac{Pl}{M_F}-\frac{Pl+2X}{M_F l}x}}\right\} = -\frac{2\delta}{l},$$

daraus ergibt sich nach einigem Umrechnen der Zusammenhang $X(P,\delta)$ in folgender Form

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{3EJ\delta(Pl+2X)^2}{2l^2M_F^3}+10\frac{(Pl+2X)^2}{(Pl-2X)^2}-20+\left[6+\frac{3Pl+2X}{M_F}\right]\sqrt{3-\frac{2X}{M_F}} \\ &-\left[\frac{(Pl+2X)^2}{(Pl-2X)^2}\left(6+\frac{Pl-2X}{2M_F}\right)+\left(-6+\frac{5Pl+2X}{2M_F}\right)\right]\sqrt{3-\frac{Pl-2X}{2M_F}}=0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (49).$$

Zu jedem Wertepaare P, δ ist damit ein Wert X und folglich die Form der elastischen Linie bestimmt. Die Reihenfolge der Aufbringung von P und δ bleibt dabei frei, da diese nur die Reihenfolge der aufeinanderfolgenden Zwischenlagen, nicht aber die schließliche Endlage beeinflußt. Bei weiterer Laststeigerung wird einmal $M_m = \frac{Pl}{4} - \frac{X}{2}$ den Wert M_T erreichen, womit der innere Widerstand der Feldmitten erschöpft ist; bezeichnet man wieder den zugehörigen Wert von P mit P_3, dann ist $\frac{P_3 l}{4} - \frac{X}{2} = M_T$ und daraus $X_3 = \frac{P_3 l}{2} - 2M_T$. Setzt man diesen Ausdruck für X_3 in Gl. (49) ein, so erhält man zur Berechnung von P_3

$$(P_3 l - 3M_F)^2\left(\frac{10}{9}M_F l^2 - 6EJ\delta\right) - 20 l^2 M_F^3 + 4P_3 l^3 M_F \sqrt{9-\frac{P_3 l}{M_F}} = 0 \quad . \; . \quad (50).$$

Bezeichnet man die Steigerung über P_3 hinaus bis zum Erreichen der Instabilität mit ΔP, so muß, da nun noch der restliche Biegungswiderstand des durch Ausschalten der steifen Ecken in den Feldmitten entstehenden Kragträgers zu überwinden ist,

$$\Delta P \cdot \frac{l}{2} = M_T - X_3 = M_T - \frac{P_3 l}{2} + 2M_T = \frac{9}{2}M_F - \frac{P_3 l}{2}.$$

Da nun $P_3 + \Delta P = P_T$, so bekommt man daraus $\Delta P + P_3 = \frac{9M_F}{l}$; das ist die von früher bekannte Tragfähigkeit des durchlaufenden Balkens mit festen Stützen. Eine Stützensenkung bewirkt demnach nur eine Verkleinerung von P_3; durch die dadurch bedingte Vergrößerung von ΔP bleibt die Summe $P_3 + \Delta P$ unverändert.

Für den besonderen Fall, daß die Stützensenkung bei steigender Belastung immer in dem Maße wächst, daß $X = 0$ bleibt, wird $M_m = \frac{Pl}{4}$ und daraus, wenn $M_m = M_T$, die Größe $P_3 = \frac{6M_F}{l}$. Weiter ist $\Delta P = \frac{2M_T}{l} = \frac{3M_F}{l}$ und $P_3 + \Delta P = \frac{6M_F}{l} + \frac{3M_F}{l} = \frac{9M_F}{l}$; das ist wieder die Tragfähigkeit des durchlaufenden Trägers auf festen Stützen.

Schlußwort.

Die Gleichungen, die den Spannungszustand eines elastisch-plastisch verformten Balkens unter den vorliegenden Annahmen bestimmen, sind auch für einfache Belastungsfälle schon recht verwickelt; dieser Umstand ist aber für das Bauwesen eigentlich ohne Bedeutung, da für dieses nur die Kenntnis der Tragfähigkeit in Frage kommt, die ohne Eingehen auf die Verformung bei gegebener Belastung und Stützung auf statisch bestimmtem Wege berechnet werden kann. Die Sicherheit des Bauwerkes wäre dann unmittelbar nach der Tragfähigkeit zu bemessen, ohne Zwischenschaltung einer zulässigen Inanspruchnahme; damit verliert natürlich die Kenntnis der auftretenden Spannungsverteilung wesentlich an Bedeutung.

134

Die Theorie der Wärmeaustauscher mit Wärmespeicherung[1].

Von *G. Ackermann*, München.

1. Einleitung. Die Übertragung der Wärme von heißen Gasen an kalte Gase geschieht in manchen Zweigen der Technik mit Hilfe periodisch arbeitender Einrichtungen, bei denen die Wärme, bevor sie an das kalte Gas gelangt, in einem dritten Körper gespeichert wird. Der heiße Gasstrom streicht während eines Zeitabschnittes in Kanälen an feuerfestem Steinmaterial vorbei und gibt einen großen Teil seiner Wärme an die Steine ab. In dem darauffolgenden Zeitabschnitt werden die Kanäle von der aufzuheizenden kalten Luft in der entgegengesetzten Richtung durchströmt; die gespeicherte Wärmemenge geht jetzt an die Luft über. Das Aufheizen der Steine wird gewöhnlich als Gasperiode, die Abkühlung als Windperiode bezeichnet. Bei konstanter Eintrittstemperatur von Gas und Wind bedingt diese Arbeitsweise ein weiteres wesentliches Merkmal: Die Gastemperaturen sind neben dem Ort auch von der Zeit abhängig; es wird also z. B. am Austritt die Temperatur des Gases fortwährend steigen, die des Windes dagegen immer fallen. Die beiden Hauptvertreter dieser Gattung von Wärmeaustauschern sind der Winderhitzer am Hochofen und der Regenerator am Siemens-Martin-Ofen.

In diesen Wärmeaustauschern ist also die Temperatur der Gase und die des Steines, wie die Speichermasse kurz genannt werden soll, sowohl vom Orte als auch von der Zeit abhängig. Ist der Winderhitzer im Beharrungszustand, d. h. ist abgesehen von den Verlusten die vom Gas abgegebene Wärmemenge gleich der vom Wind aufgenommenen, so werden sich am Ende der Gasperiode und am Ende der Windperiode jeweils die gleichen Temperaturen im Stein einstellen. Diese Temperaturverteilungen müssen das Endziel jeder Berechnung sein, denn sie sind maßgebend für das Verhalten des Winderhitzers, durch sie ist sein Wirkungsgrad und der Temperaturabfall des erwärmten Windes, also die beiden Größen, nach welchen die Praxis in erster Linie frägt, festgelegt. Die Ermittlung dieses Beharrungszustandes kann auf zwei Wegen erfolgen. Der eine versucht ihn direkt zu erfassen, der andere verlangt zuerst eine Lösung des Winderhitzerproblems für eine beliebig gegebene Anfangstemperaturverteilung.

Bevor auf die hier zu entwickelnde Theorie eingegangen wird, soll eine kurze kritische Sichtung der wichtigsten vorhandenen Arbeiten vorausgeschickt werden.

2. Literatur. Das große Bedürfnis nach einer sicheren Berechnungsgrundlage für den Winderhitzer — es sei der Einfachheit halber bei diesem Namen geblieben —, das naturgemäß bei den Eisenhüttenleuten am stärksten vorhanden ist, hat in der letzten Zeit eine Reihe von Arbeiten entstehen lassen, die man nach zwei Richtungen hin unterscheiden kann. Die eine sucht nach einer einfachen überschlägigen Näherungsformel, die andere strebt eine möglichst exakte mathematische Darstellung des örtlichen und zeitlichen Temperaturverlaufs im Winderhitzer an.

Die zweifellos brauchbarste Arbeit der ersten Richtung ist die von W. Heiligenstaedt[2]. Der Verfasser sucht eine Analogie zwischen Gegenstromapparat und Winderhitzer herzustellen. Er geht daher von der Grundgleichung des Gegenstroms (Rekuperator) aus und setzt auch für den Winderhitzer das pro Flächenelement dF durchgehende Wärmeelement dQ proportional der Differenz der gleichzeitig vorhanden gedachten mittleren Gas- und Windtemperatur, also

$$dQ = \varepsilon(\vartheta - \vartheta')\,dF.$$

Der Faktor ε wird als konstant angenommen und hat jetzt nicht mehr die Dimension der Wärmedurchgangszahl, sondern bedeutet hier die pro Gesamtperiode als Gas- plus Windperiode, ^0C und m^2 übergehende Wärme. Auf diese Weise läßt sich eine Berechnung der mittleren Gas- und Windtemperaturen im Winderhitzer mit Hilfe der bekannten Gegenstromformeln durchführen. In Wirklichkeit ist natürlich das ε eine äußerst komplizierte Funktion, die in erster Linie auch vom Orte abhängt, und zwar um so mehr, je kleiner die Heizfläche im Verhältnis zur Dauer der Perioden ist. Nur bei sehr kleiner Periodendauer wird das ε konstant und folglich die Berechnung des Winderhitzers mit den Gegenstromformeln streng richtig. Der Beweis hierfür ist z. B. dadurch geliefert, daß sich dann die Formeln von Heiligenstaedt in die von Nußelt[3]) in seiner Abhandlung: Die Theorie des Winderhitzers Fall 1 gefundenen Beziehungen überführen lassen. Der Verfasser setzt weiter die Gas- und Wind-

[1]) Die Anregung zu dieser Arbeit erhielt ich von Herrn Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. W. Nußelt, dem ich für die stets wohlwollende Unterstützung und die wertvollen Ratschläge bei der Durchführung auch an dieser Stelle meinen ergebensten Dank ausspreche.

[2]) W. Heiligenstaedt, Die Berechnung von Wärmespeichern, Archiv für das Eisenhüttenwesen 1928, Heft 4, S. 217.

[3]) Nußelt, Die Theorie des Winderhitzers, Z. d. V. d. I. 1927, S. 85.

temperaturen als unabhängig von der Zeit voraus und bestimmt mit dieser Näherung durch eine Reihenentwicklung nach Fourier, welche genügend oft wiederholt werden muß, die im Stein während der Gesamtperiode gespeicherte und wieder entnommene Wärmemenge. Da diese Wärmemenge gleich dem Produkt aus ε und der Differenz von Gas- und Windtemperatur sein muß, ist ε hiermit festgelegt. Wie später gezeigt wird, läßt die Heiligenstaedtsche Rechnung in den Fällen, wo man es mit einer großen Heizfläche und einer relativ kleinen Periodendauer zu tun hat, eine gute Näherung zu.

K. Rummel[4]) hat sich in einem Aufsatz ebenfalls mit der Bestimmung der Zahl ε befaßt. Durch Kombination der Grundgleichungen des Wärmeübergangs und Wärmedurchgangs und mit Hilfe einiger Annahmen, so z. B. die der Cosinusschwingung der Steinoberflächentemperatur, gelangt er zu einer einfachen Beziehung für ε, die analog der Wärmedurchgangszahl aufgebaut ist. Die Hauptschwierigkeit ist dabei allerdings durch Einführung seines Koeffizienten ζ umgangen. Für die praktisch vorkommenden Fälle schätzt Rummel $\zeta = 2{,}5$ und erreicht auch eine gute Übereinstimmung mit den Werten von Heiligenstaedt.

Die Frage nach der Schwankung der Windtemperatur ist für die Praxis von besonderer Bedeutung, weil es für manche Zwecke notwendig ist, diese Temperatur in gewissen Grenzen zu halten. Mit dem beschriebenen Berechnungsverfahren kann man aber den Abfall der Windtemperatur und den Anstieg der Gastemperatur nicht erkennen, da es nur zeitliche Mittelwerte liefert. Um für den zeitlichen Anstieg bzw. Abfall dieser Temperaturen eine Beziehung zu finden, stellt A. Schack[5]) zunächst eine Differentialgleichung für die Gastemperatur, abhängig von Zeit und Ort, auf, indem er die Änderung $d\vartheta_s$ der Oberflächentemperatur proportional der Wärmeaufnahme des Steinelementes setzt. Dieser Ansatz liefert $\frac{\partial \vartheta_s}{\partial t}$ abhängig von der Differenz der Gas- und Steintemperatur Gl. (430a) und (492b), er ist aber nur angenähert zulässig, da er eine willkürliche Annahme über die Schwankung der Oberflächentemperatur verlangt, auf Grund deren erst der sogenannte Ausnützungsfaktor η bestimmt werden kann. Die Gl. 430a kann über die Periodendauer integriert werden. Die dadurch entstehende Gl. 430c liefert den mittleren zeitlichen Anstieg bzw. Abfall der Gas- und Windtemperatur, abhängig von der mittleren Heizflächenleistung q_m. Voraussetzung für die Anwendung dieser Gleichung ist daher das Bekanntsein der mittleren Gas- und Windtemperaturen ϑ_m und ϑ_m' z. B. nach dem Heiligenstaedtschen Verfahren, denn damit gilt näherungsweise:

$$q_m = \frac{\varepsilon}{t_H}(\vartheta_m - \vartheta_m').$$

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß die Gl. 430a von Schack unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen $\frac{\partial \vartheta_s}{\partial t}$ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, auf die Gl. 46 von Nußelt in seiner zuerst angezogenen Arbeit, Fall 3, führen muß. (Siehe Gl. 430 von Schack.)

H. Preußler[6]) versucht den verwickelten physikalischen Zusammenhängen beim Winderhitzer durch Einzelüberlegungen näherzukommen. Die dabei entstehenden Irrtümer werden manchmal entgegen den richtigen Anschauungen anderer Autoren (Osann und Gugler) vertreten. Die eigentliche Berechnung des Verfassers besteht in dem Gleichsetzen der vom Wind aufgenommenen und der vom Stein abgegebenen Wärmemenge, wobei die Heizfläche nicht vorkommt. Auf Grund dieser Rechnung glaubt Preußler bewiesen zu haben, daß die Heizfläche das unmaßgeblichste Bestimmungsstück des Winderhitzers ist. Ein überschlägiger Vergleich mit den längst bekannten Beziehungen für den Gegenstrom, zeigt den tatsächlichen Einfluß der Heizfläche.

Es gibt nun ferner eine Reihe, vielfach schon längere Zeit zurückliegender Arbeiten, die sich in erster Linie auf die Erfahrung und das Experiment stützen. Gewöhnlich werden darin an Hand der Daten von ausgeführten Winderhitzern ungefähre Richtlinien für die Abmessungen aufgestellt. In diesem Zusammenhang sei nur noch auf das Lehrbuch von Osann[7]) hingewiesen, der ja wohl auch zum ersten Male die Winderhitzerfrage angeschnitten hat.

Das Verfahren von Heiligenstaedt und Rummel mag wohl gestatten, für einen konkreten Fall, bei dem die getroffenen Näherungen zulässig sind, eine gute Überschlagsrechnung durchzuführen, es muß aber naturgemäß versagen, wenn es sich darum handelt, allgemein und genau die verschiedenen Einflüsse der Bestimmungsgrößen, wie z. B. die Periodendauer, die Steinstärke, die Heizfläche usw., auf das Verhalten eines Wärmeaustausches zu

[4]) K. Rummel, Die Berechnung der Wärmespeicher auf Grund der Wärmedurchgangszahl, Zeitschr. Stahl und Eisen 1928, S. 1712.

[5]) A. Schack, Der industrielle Wärmeübergang, Verlag Stahleisen G. m. b. H., Düsseldorf 1929.

[6]) H. Preußler, Zur Theorie und Berechnung von Wärmespeichern und Winderhitzern, Dissertation Breslau 1920.

[7]) B. Osann, Lehrbuch der Eisenhüttenkunde, Leipzig 1915.

untersuchen. Eine Klarlegung dieses verwickelten Ineinandergreifens wird man nur von einer möglichst strengen mathematischen Erfassung des Problems verlangen können. Die Praxis darf allerdings nicht erwarten, daß in dem vorliegenden Falle, wo die Dinge doch reichlich kompliziert liegen, das Resultat eine einfache Formel sein wird.

Die Theorie der Wärmeaustauscher mit Speicherung wurde grundlegend von Nußelt geschaffen und ausgebaut. In seiner schon genannten Abhandlung: Die Theorie des Winderhitzers, hat Nußelt für fünf verschiedene Annahmen den Temperaturverlauf im Winderhitzer ermittelt. In dem Fall der unendlich kurzen Periodendauer und in dem der unendlich großen Wärmeleitfähigkeit des Speichermaterials ergeben seine Endformeln bereits den Beharrungszustand. In den weiteren drei Fällen ist eine gegebene Anfangstemperaturverteilung vorausgesetzt. Der Beharrungszustand kann hier durch schrittweise Annäherung bis zu jeder beliebigen Genauigkeit gefunden werden. Mit den Voraussetzungen von Fall 3, bei dem die Wärmeleitzahl des Steines parallel zur Strömungsrichtung der Gase Null und senkrecht dazu unendlich groß ist, hat sich auch A. Anzelius[8]) befaßt. Während bei Nußelt die Lösung exakt ist und für einen beliebigen Anfangszustand gilt, ist die von Anzelius angenähert und setzt konstante Anfangstemperatur voraus, kann also zur Festlegung des Beharrungszustandes nicht benützt werden.

In Fall 5 sind die der praktischen Ausführung des Winderhitzers am nächsten kommenden Annahmen gemacht, die Grenzbedingungen für die hier geltende Fouriersche Differentialgleichung aufgestellt und ein graphisches Lösungsverfahren angegeben. Es ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit für diesen Fall, bei dem die Wärmeleitzahl des Steines parallel zur Strömungsrichtung der Gase wieder Null, senkrecht dazu aber von endlicher Größe ist, eine analytische Lösung zu entwickeln.

In einer weiteren Abhandlung: Der Beharrungszustand im Winderhitzer[9]) hat Nußelt, ausgehend von der Lösung seines Falles 3, mit den vereinfachenden Annahmen, daß die Periodendauer, die hindurchströmenden Wasserwerte und die Wärmeübergangszahlen in beiden Perioden die gleichen Werte haben, in äußerst knapper und übersichtlicher Form eine strenge Lösung für den Beharrungszustand angegeben. Die dabei auftretende Integralgleichung besitzt den Vorteil einer sehr raschen Konvergenz, so daß man praktisch die zu ihrer Auflösung angesetzte Reihe nach vier Gliedern abbrechen kann.

H. Hausen[10]) deutet die Vorgänge im Winderhitzer während des Beharrungszustandes als erzwungene Temperaturschwingung. Er zerlegt diese in Eigenschwingungen und löst das Problem unter Heranziehung der Methode der kleinsten Quadrate für die gleichen Annahmen wie oben. In einer neueren Arbeit[11]) gibt Hausen einen Weg an, der im wesentlichen auf die Nußeltschen Beziehungen hinausläuft mit der Ausnahme, daß eine angenäherte Lösung der Integralgleichung vorgeschlagen wird.

W. Schmeidler[12]) faßt den Winderhitzer als eine Summe zylindrischer, massiver Körper mit beliebigem Querschnitt auf, die von dem entlangstreichenden Gas oder Wind vollständig umgeben sind, so daß die Wärmeleitung zweidimensional einzuführen ist. Die Resultate dieser Betrachtungsweise können auf die allgemein übliche Ausführungsform als Hohlzylinder nur dann angewendet werden, wenn man, wie später noch gezeigt wird, eine kleine Vernachlässigung trifft, die ihrerseits wieder eindimensionale Wärmeleitung zur Folge hat. Alle weiteren Annahmen sind die gleichen, welche auch in dem vorliegenden Falle zugrunde gelegt werden sollen.

Zur Durchführung der Aufgabe nimmt Schmeidler die Gastemperatur für eine Zwischenlösung zunächst als konstant an. Unter Berücksichtigung der dann geltenden Grenzbedingungen wird diese Lösung in bekannter Weise als Summe von Partikularlösungen der Fourierschen Differentialgleichung gebildet. Mit Hilfe eines Kunstgriffes — Darstellung der Zahl 1 durch eine Fouriersche Reihenentwicklung — dehnt der Verfasser diese Lösung auch auf Gastemperaturen, die von Zeit und Ort abhängen, aus. (Gl. 5.) Durch Einsetzen von Gl. 5 in die Grenzbedingung, welche den Abfall der Gastemperatur und den entsprechenden Anstieg der Steintemperatur zum Ausdruck bringt (Gl. 6), entsteht eine partielle Differentialgleichung mit der Gastemperatur als der abhängig Veränderlichen. (Gl. 7.) Unter Verwendung der Gl. 7 sucht der Verfasser eine Beziehung für den Beharrungszustand zu bekommen, indem er die in dieser Gleichung enthaltene Temperaturverteilung im Stein zu Beginn der Gasperiode, durch die am Ende der vorhergegangenen Gasperiode ausdrückt, diese wiederum

[8]) A. Anzelius, Über Erwärmung vermittels durchströmender Medien, Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. 1926, S. 291.

[9]) W. Nußelt, Der Beharrungszustand im Winderhitzer, Z. d. V. d. I. Jahrgang 1928, S. 1052.

[10]) H. Hausen, Über die Theorie des Wärmeaustausches in Regeneratoren. Habilitationsschrift, Technische Hochschule München.

[11]) Siehe: Wärmeaustausch in Regeneratoren, Z. d. V. d. I. 1929, S. 432.

[12]) W. Schmeidler, Mathematische Theorie der Wärmespeicher, Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. 1928, S. 385.

durch die Verteilung am Ende der vorausgegangenen Windperiode ersetzt usw. Dieses Vorgehen entspricht mit anderen Worten einem oftmaligen Durchrechnen der aufeinanderfolgenden Perioden, bis der Einfluß der zu Beginn herrschenden Temperaturverteilung verschwindet. Die Formulierung dieses Gedankens führt Schmeidler auf die beiden Differentialgleichungen 14 und 15 für Gas- und Windtemperatur, mit der unendlichen Anzahl von Integralen, bei denen im Integranden abwechselnd die Gastemperatur $\vartheta_1(t, z)$ und die Windtemperatur $\vartheta_2(t, z)$ erscheint. Nach Umgestaltung dieser Integrale, Einführung der Variablen $\eta = t - \frac{z}{v}$ für t, und Integration nach z, gelangt der Verfasser zu einem System Volterrascher Integralgleichungen.

Da dieses System von Gleichungen wegen der darin enthaltenen Unstetigkeiten zunächst nur formale Bedeutung hat, beschränkt sich der Verfasser auf eine angenäherte Bestimmung der mittleren Gas- und Windtemperaturen $w_1(z)$ und $w_2(z)$ (zeitliches Mittel). Er geht zu diesem Zwecke von Gl. 14 und 15 aus, integriert beide Seiten nach der Zeit, zwischen den Grenzen einer Periodendauer und dividiert durch diesen Zeitabschnitt. Ziel des Verfassers ist, die entstehenden Gleichungen auf ein System totaler Differentialgleichungen für $w_1(z)$ und $w_2(z)$ zurückzuführen. Zu diesem Zwecke werden nun eine Reihe von Näherungen gemacht, auf die hier nicht weiter eingegangen werden kann. Um ein Beispiel anzuführen, sei erwähnt, daß bei der Umformung des ersten Bestandteiles der zerlegten Integralsummen, die unter dem Integral stehende, in erster Annäherung der Zeit proportionale Funktion ϑ_1 vor das Integral gesetzt wird, so daß I übergeht in $\vartheta_1(z, t) - \vartheta_1(z, 0)$. Die durch diese und ähnliche Approximationen auftretenden Differenzen $\vartheta_1(z, p) - \vartheta_1(z, 0)$ usw. (Gl. 20) werden von Schmeidler näherungsweise proportional der entsprechenden Mitteltemperatur gesetzt, wobei in den vier vorkommenden Fällen der Proportionalitätsfaktor zu schätzen ist. Vergleicht man den von Schmeidler behandelten Fall mit dem hier durchgerechneten, was sich wegen der im großen und ganzen übereinstimmenden Abmessungen, besonders aber da es bei dieser Betrachtung in erster Linie auf den Wirkungsgrad ankommt, gut machen läßt, so wird beispielsweise für den Koeffizienten δ_1, der in Wirklichkeit von 0, am Eintritt des Gases in den Winderhitzer, auf etwa 1,4 am Austritt ansteigt, der konstante Wert 0,203 angenommen.

Durch Zusammenziehung der Glieder mit $w'(z)$ und $w_2(z)$ entsteht das erwähnte System von totalen Differentialgleichungen. Mit den geschätzten Faktoren erzielt der Verfasser eine Übereinstimmung der gerechneten Temperaturen mit Versuchswerten.

Bemerkt sei noch, daß der Verfasser in seiner Randbedingung (2) die durch Leitung und Strahlung an die Umgebung verlorengegangene Wärmemenge proportional der Heizfläche und der jeweiligen Gas- und Windtemperatur einführt. Dieser Ansatz kompliziert unnötig die Rechnung und entspricht nicht den Tatsachen. Man wird daher viel bequemer und richtiger die Verluste nachträglich an Hand der äußeren Abmessungen und der mittleren Steintemperaturen berücksichtigen. Gleichzeitig hat dies weiter den Vorteil, daß das Ergebnis den maximalen Wirkungsgrad liefert und nicht durch das angenommene Verlustglied getrübt ist.

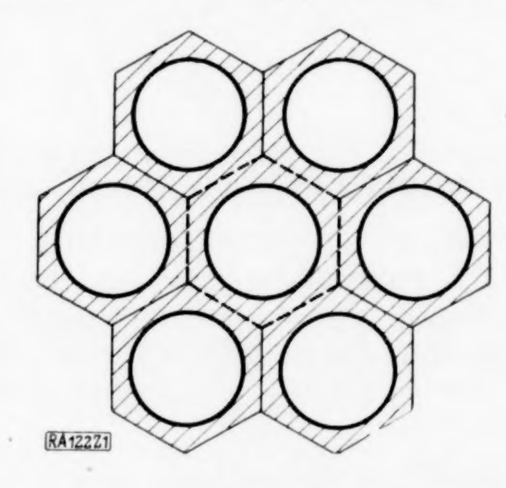


Abb. 1.

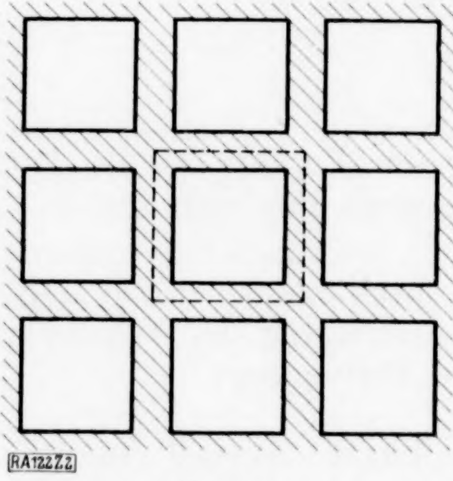


Abb. 2.

Einen der ersten Beiträge zur Theorie des Winderhitzers hat H. Gröber[13]) geliefert. Er behandelt darin den Vorgang der Wärmespeicherung im Stein getrennt von dem des Wärmeüberganges und ist naturgemäß in beiden Fällen zu besonderen Annahmen gezwungen. Um zu einem Resultat vorzudringen, muß dann eine Darstellung des Zusammenwirkens der Vorgänge unter Zuhilfenahme des Gefühls erfolgen.

Es wird nun die Temperaturverteilung im Winderhitzer, am Ende einer Periode, für eine beliebig gegebene Anfangstemperaturverteilung als Funktion der Ortskoordinaten und der Zeit ermittelt.

3. Annahmen. In Abb. 1 und 2 sind Schnitte durch die üblichen Ausführungsformen des zylindrischen Gitterwerkes eines Winderhitzers dargestellt. Das zu einem Kanal gehörige

[13]) H. Gröber, Zur Theorie und Berechnung der Winderhitzer, Zeitschr. Stahl und Eisen 1924, Nr. 2.

Steinmaterial ist durch die gestrichelt eingezeichneten Linien begrenzt. Durch diese Begrenzungsfläche kann aus Gründen der Symmetrie keine Wärme hindurchfließen. Man sieht, daß die Öffnung eines solchen Kanals groß ist im Vergleich zur dazugehörigen mittleren Wandstärke. Zur Berechnung denkt man sich daher die Innenfläche jedes Kanals in eine Ebene ausgebreitet und aneinandergestoßen. Es kann dann angenommen werden, daß hierdurch eine gleichmäßig starke Platte entsteht, deren Tiefe man erhält, wenn man das ganze Steinvolumen des Gitterwerks durch die Gesamtheizfläche dividiert. Die eine Seite dieser Platte wird von den Gasen bestrichen, die andere muß als wärmeundurchlässig vorausgesetzt werden. Ihre Wärmeleitzahl sei parallel zur Strömungsrichtung der Gase Null und senkrecht dazu von endlicher Größe. Ferner sei angenommen, daß die Temperaturen von Gas und Wind nur von der Zeit und der Ortskoordinate in der Richtung der Gasströmung abhängen. Die Wärmeübergangszahlen werden während einer Periode als mittlere, konstante Größen vorausgesetzt. Ebenso werde angenommen, daß Gas und Wind immer mit der konstanten Temperatur u_0 bzw. v_0 in den Winderhitzer hereinkommen.

4. Differentialgleichung und Grenzbedingungen. Im folgenden bedeutet:

F die gasbestrichene Oberfläche der Platte, also die Gesamtheizfläche des Winderhitzers,
c die Stärke der Platte,
a^2 die Temperaturleitfähigkeit der Steine,
λ die Wärmeleitzahl der Platte,
W den Wasserwert der Gase, die pro Zeiteinheit durch den Winderhitzer strömen,
t die Steintemperatur,
u die Gastemperatur,
u_0 die konstante Gastemperatur am Eintritt,
v die Windtemperatur,
v_0 die konstante Windtemperatur am Eintritt,
α die Wärmeübergangszahl,
x' die Ortskoordinate in Richtung des Gasstroms; ist zugleich die Heizfläche, so daß $d\,x'$ ein Flächenelement bedeutet,
y' die in die Tiefe der Platte gerichtete Koordinate,
z' die Zeit.
Am Gaseintritt sei $x'=0$, an der gasberührten Oberfläche $y'=0$.
z_1' die Dauer der Gasperiode,
z_2' die Dauer der Windperiode.
Der Index 1 bedeutet immer die Gasperiode, der Index 2 die Windperiode.

Für den Temperaturverlauf im Stein gilt nach den getroffenen Annahmen die Fouriersche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial t}{\partial z'} = a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial y'^2}.$$

Zu Beginn der Periode ist die Temperaturverteilung im Stein als Funktion von x' und y' gegeben. Es muß also sein für

$$z'=0\,,\quad t=f_1(x',y')\,.$$

Für die Übertragung der Wärme von den heißen Gasen an den Stein gilt während der Gasperiode die Bedingung:

$$y'=0\,,\quad \alpha_1(u-t)=-W_1\frac{\partial u}{\partial x'}.$$

Die an die Oberfläche abgegebene Wärme muß in den Stein wandern, es ist also weiter für

$$y'=0,\quad \alpha_1(u-t)=-\lambda\frac{\partial t}{\partial y'}.$$

Die andere Oberfläche des Steines muß als wärmeundurchlässig betrachtet werden, es ist demnach hier die Bedingung zu erfüllen, für

$$y'=c,\quad \frac{\partial t}{\partial y'}=0.$$

Außerdem ist noch für

$$x'=0,\quad u=u_0\,.$$

Führt man in diese Gleichungen die Beziehungen ein

$$T = u_0 - t,$$

$$b = \frac{a_1}{\lambda},$$

$$g = \frac{a_1}{W_1},$$

und eliminiert man weiter die Gastemperatur u, so lautet das Gleichungssystem[14]):

$$\frac{\partial T}{\partial z'} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} \qquad (1)$$

$$z' = 0, \qquad T = u_0 - f_1(x', y') \qquad (2)$$

$$y' = 0, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x' \partial y'} - b \frac{\partial T}{\partial x'} + g \frac{\partial T}{\partial y'} = 0 \qquad (3)$$

$$y' = c, \qquad \frac{\partial T}{\partial y'} = 0 \qquad (4)$$

$$x' = 0 \text{ und } y' = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y'} = b\,T \qquad (5).$$

5. Aufbau der Lösung.

Nach Einführung der neuen Variablen:

$$x = g\,x', \quad y = b\,y', \quad z = a^2 b^2 z' \text{ und } b \cdot c = C$$

nehmen die Gleichungen 1 mit 5 folgende Form an

$$\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (I)$$

$$z = 0, \qquad T = u_0 - f_1(x, y) = f(x, y) \qquad (II)$$

$$y = 0, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad (III)$$

$$y = C, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad (IV)$$

$$x = 0 \text{ und } y = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} - T = 0 \qquad (V).$$

Es wird versucht, die Lösung aus zwei Teilen zusammenzusetzen, von denen der erste Teil $F(x, y, z)$ nur den Ausgleich der gegebenen Anfangstemperaturverteilung innerhalb des Steines wiedergeben soll, der sich also einstellen würde, wenn kein Wärmeaustausch mit dem Gasstrom vorhanden wäre. Diese physikalische Bedeutung der Funktion F macht die Lösung übersichtlicher und hat für die Rechnung, wie sich später zeigen wird, wegen der Randbedingung: $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ für $y = 0$, große Vorteile.

$F(x, y, z)$ muß also ein Integral der Gleichung I sein und folgende Randbedingungen erfüllen:

für $z = 0$; $\qquad F(x, y, 0) = f(x, y)$,

ferner für $y = 0$ und $y = C$, $\qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Dieser Fall zählt zu den bereits gelösten Wärmeleitvorgängen der mathematischen Physik[15]). Man setzt das Integral als Summe von Partikularlösungen von der Form

$$e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{C}\right)^2 z} \cos \frac{n\,\pi}{C}\, y$$

[14]) Siehe Nußelt, Fall 5.
[15]) Siehe Riemann-Weber II, S. 232 Gl. 70.

an und entwickelt für $z=0$ die Funktion $f(x,y)$ in eine Fouriersche Reihe mit Cosinusgliedern. Für $y=0$ und $y=C$ verschwinden dann die Temperaturgradienten aller Glieder für alle Zeiten. Nach Einführung der Abhängigkeit von x, die sich hier zwanglos gestaltet, ist

$$F(x,y,z)=\frac{2}{C}\left[\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{C}\right)^2 z}\cos\frac{n\pi}{C}y\cdot\int_0^C f(x,\eta)\cos\frac{n\pi}{C}\cdot\eta\,d\eta+\frac{1}{2}\int_0^C f(x,\eta)\,d\eta\right].$$

Für große Zeiten ($z=\infty$) wird $F=\frac{1}{C}\cdot\int_0^C f(x,\eta)\,d\eta$, also gleich der mittleren Temperatur in den verschiedenen Steinlagen ($x=\text{const}$).

Für den zweiten Teil der gesuchten Lösung wird das Integral

$$\Phi_1(y,z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{z-\zeta}}\cdot e^{-\frac{y^2}{4(z-\zeta)}}\varphi(\zeta)\,d\zeta$$

herangezogen, das bei der Greenschen Methode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung eine Hauptrolle spielt[16]). Φ_1 befriedigt Gl. (I), ζ ist hierin die zu z gehörige Integrationsvariable und φ ist eine beliebige stetige Funktion. Um kurz zu zeigen, daß Φ_1 der Fourierschen Differentialgleichung genügt, werden die einzelnen Differentialquotienten hergestellt. Es ist

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{z-\zeta}}\,\frac{-y}{2(z-\zeta)}\,e^{-\frac{y^2}{4(z-\zeta)}}\varphi(\zeta)\,d\zeta$$

und $$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{z-\zeta}}\left(\frac{-1}{2(z-\zeta)}e^{-\frac{y^2}{4(z-\zeta)}}+\frac{y^2}{4(z-\zeta)^2}e^{-\frac{y^2}{4(z-\zeta)}}\right)\varphi(\zeta)\,d\zeta,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z\left[\frac{-1}{2(z-\zeta)^{3/2}}e^{-\frac{y^2}{4(z-\zeta)}}+\frac{1}{\sqrt{z-\zeta}}\,\frac{y^2}{4(z-\zeta)^2}\,e^{-\frac{y^2}{4(z-\zeta)}}\right]\varphi(\zeta)\,d\zeta.$$

Es ist also

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}.$$

Daran wird offenbar nichts geändert, wenn man eine kleine Umformung vornimmt und schreibt:

$$\Phi_2(y,z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{z-\zeta}}\,e^{-\frac{(2C-y)^2}{4(z-\zeta)}}\varphi(\zeta)\,d\zeta.$$

Damit hat nur eine Verschiebung in der y-Richtung stattgefunden. Nun ist

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{z-\zeta}}\,\frac{2C-y}{2(z-\zeta)}\,e^{-\frac{(2C-y)^2}{4(z-\zeta)}}\varphi(\zeta)\,d\zeta.$$

Man sieht ohne weiteres, es besteht die Beziehung:

für $y=C$ ist $\frac{\partial(\Phi_1+\Phi_2)}{\partial y}=0$, für alle Zeiten.

Für $z=0$ ist $\Phi_1+\Phi_2=0$.

Nach diesen Vorbereitungen werde das Integral des Gleichungssystems I mit V wie folgt angesetzt:

[16]) Siehe Riemann-Weber I, S. 649, und Goursat III, S. 302 u. 311.

$$\left.\begin{aligned} T(x,y,z) &= F-(\Phi_1+\Phi_2)=\frac{2}{C}\left[\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{C}\right)^2 z}\cos\left(\frac{n\pi}{C}\right)y\int_0^C f(x,\eta)\cos\frac{n\pi}{C}\eta\,d\eta\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{2}\int_0^C f(x,\eta)\,d\eta\right]-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{z-\zeta}}\left(e^{-\frac{y^2}{4(z-\zeta)}}+e^{-\frac{(2C-y)^2}{4(z-\zeta)}}\right)\varphi(x,\zeta)\,d\zeta\\ &= F(x,y,z)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{z-\zeta}}\left(e^{-\frac{y^2}{4(z-\zeta)}}+e^{-\frac{(2C-y)^2}{4(z-\zeta)}}\right)\varphi(x,\zeta)\,d\zeta \end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad (6).$$

Der Ausdruck 6 ist nach dem Vorhergegangenen ein Integral der Gl. I und erfüllt die Grenzbedingungen II und IV. Die Variable x, die ja in der Differentialgleichung nicht vorkommt, konnte durch diesen Ansatz ohne Schwierigkeiten in der nach beliebigen, stetigen Funktion φ eingeführt werden.

Es muß jetzt noch gelingen, diese Funktion $\varphi(x,\zeta)$ so zu bestimmen, daß auch die letzten beiden Bedingungen III und V erfüllt sind.

Gl. (6) wird daher zunächst in die Grenzbedingung III eingesetzt. Zu diesem Zwecke werden die Differentialquotienten von III für $y=0$ gebildet.

$$\frac{\partial T}{\partial x}_{(y=0)}=\frac{\partial F(x,0,z)}{\partial x}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{z-\zeta}}\left(1+e^{-\frac{C^2}{z-\zeta}}\right)\frac{\partial\varphi(x,\zeta)}{\partial x}\,d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y}_{(y=0)} &= \lim_{y=0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z\frac{1}{2}(z-\zeta)^{-\frac{3}{2}}\,y\,e^{-\frac{y^2}{4(z-\zeta)}}\varphi(x,\zeta)\,d\zeta\\ &\quad-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z(z-\zeta)^{-\frac{3}{2}}C\,e^{-\frac{C^2}{z-\zeta}}\varphi(x,\zeta)\,d\zeta \end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

In Gl. (8) erscheint das erste Integral für $y=0$ wegen des Exponenten $-\frac{3}{2}$ in der unbestimmten Form $\infty\cdot 0$. Die Substitution $\frac{y^2}{4(z-\zeta)}=\alpha^2$, α als neue Integrationsvariable, zeigt aber, daß das Integral in diesem Falle den Grenzwert $\frac{1}{2}\varphi(x,z)$ besitzt[17]. Damit wird

$$\frac{\partial T}{\partial y}_{(y=0)}=\frac{1}{2}\varphi(x,z)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z(z-\zeta)^{-\frac{3}{2}}C\,e^{-\frac{C^2}{z-\zeta}}\varphi(x,\zeta)\,d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}_{(y=0)}=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial x}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z(z-\zeta)^{-\frac{3}{2}}C\,e^{-\frac{C^2}{z-\zeta}}\frac{\partial\varphi(x,\zeta)}{\partial x}\,d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Setzt man in Gl. (7) $\frac{1}{\sqrt{z-\zeta}}\left(1+e^{-\frac{C^2}{z-\zeta}}\right)=K_0(z,\zeta)$ . . . . (11)

und in Gl. (9) und (10) $(z-\zeta)^{-\frac{3}{2}}C\,e^{-\frac{C^2}{z-\zeta}}=K_1(z,\zeta)$ . . . . (12),

so muß nach Bedingung III sein:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial x}+\varphi(x,z)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^z K_1(z,\zeta)\,\varphi(x,\zeta)\,d\zeta\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^z\Big(K_0(z,\zeta)-K_1(z,\zeta)\Big)\frac{\partial\varphi(x,\zeta)}{\partial x}\,d\zeta-2\frac{\partial F(x,0,z)}{\partial x} \end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

17) Riemann-Weber II, S. 225.

Integriert man Gl. (13) zwischen den Grenzen 0 und x, was zweifellos erlaubt ist, denn die neue Gleichung enthält ja auch die für $\varphi(x, y)$ vorgeschriebene Bedingung III, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \varphi(x, z) + \int_0^x \varphi(\xi, z)\, d\xi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x\int_0^z K_1(z, \zeta)\, \varphi(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \Big(K_0(z, \zeta) - K_1(z, \zeta)\Big) \varphi(x, \zeta)\, d\zeta - 2\, F(x, 0, z) \end{aligned}\right\} \quad . . . . (14).$$

Durch die Wahl der unteren Grenze wurde über die bei der Integration auftretende Konstante so verfügt, daß, wie gleich gezeigt werden soll, auch der letzten Grenzbedingung V genügt wird.

Aus Gl. (9) und (6) erhält man mit V:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial y} - T\right)_{x=y=0} = 0 = \frac{1}{2}\varphi(0, z) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^z K_1(z, \zeta)\, \varphi(0, \zeta)\, d\zeta - F(0, 0, z) \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^z K_0(z, \zeta)\, \varphi(0, \zeta)\, d\zeta \end{aligned}\right\} \quad . . . . . . (15).$$

Für $x = 0$ und $y = 0$ geht Gl. (14) über in (15). Es werden also durch (14) die Bedingungen III und V erfüllt.

Setzt man nun noch in Gl. (14)

$$K_0(z, \zeta) - K_1(z, \zeta) = K_2(z, \zeta)$$

und löst man nach φ auf, so ergibt sich mit $\lambda = 1$,

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, z) = (\lambda) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x\int_0^z K_1(z, \zeta)\, \varphi(\xi, \zeta)\, d\xi, d\zeta - \int_0^x \varphi(\xi, z)\, d\xi \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z K_2(z,)\, \varphi(x, \zeta)\, d\zeta \right] + 2\, F(x, 0, z) \end{aligned}\right\} \quad . . . . (17).$$

Dies ist eine etwas allgemeinere Volterrasche Integralgleichung mit den zwei unabhängig Veränderlichen x und z, die eine, und nur eine Lösung besitzt. K_1, K_2 und F sind bekannte Funktionen, $\varphi(x, z)$ ist die dadurch eindeutig bestimmte gesuchte Funktion. Der Kern des Doppelintegrals dieser Gleichung hängt nur von z und ζ, nicht auch von x und ξ ab. Der des Integrals nach x ist gleich 1.

Die Lösung für Gl. (17) wird nach Volterra[18]) in Form einer Potenzreihe des Parameters λ, der später wieder den Wert 1 erhält, angesetzt.

$$\varphi(x, z) = \varphi_0(x, z) + \lambda\, \varphi_1(x, z) + \lambda^2\, \varphi_2(x, z) \; . . . . . + \lambda^n\, \varphi_n(x, z) \quad . . . . (18).$$

Gl. (18) in (17) eingesetzt, ergibt durch Gleichsetzen der Koeffizienten gleicher Potenzen von λ folgende Bestimmungsgleichungen für $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 - \varphi_n$.

$$\varphi_0(x, z) = 2\, F(x, 0, z)$$

$$\varphi_1(x, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x\int_0^z K_1(x, \zeta)\, \varphi_0(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta - \int_0^x \varphi_0(\xi, z)\, d\xi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z K_2(z, \zeta)\, \varphi_0(x, \zeta)\, d\zeta$$

$$\varphi_2(x, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x\int_0^z K_1(x, \zeta)\, \varphi_1(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta - \int_0^x \varphi_1(\xi, z)\, d\xi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z K_2(z, \zeta)\, \varphi_1(x, \zeta)\, d\zeta$$

— —

$$\varphi_n(x, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x\int_0^z K_1(x, \zeta)\, \varphi_{n-1}(\xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta - \int_0^x \varphi_{n-1}(\xi, z)\, d\xi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z K_2(z, \zeta)\, \varphi_{n-1}(x, \zeta)\, d\zeta\,.$$

[18]) Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Paris 1913.

Aus diesen $n+1$ Gleichungen erhält man die Lösung von (17) in der Form

$$\varphi(x,z)=\varphi_0(x,z)+\varphi_1(x,z)+\varphi_2(x,z)\;.\;.\;.\;.\;.+\varphi_n(x,z)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(19).$$

Die Konvergenzbedingung für diese Reihe ist erfüllt[19]).

Die Gleichungen (6) und (19) bilden also zusammen die Lösung des gestellten Problems. Anfangs wurde gezeigt, daß für $y'=0$ die Randbedingung bestehen muß

$$\alpha_1\cdot(u-t)=-\lambda\frac{\partial t}{\partial y'}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(20).$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man jetzt bequem die Gastemperatur u als Funktion von x und z darstellen.

Es werden wieder in Gl. (20) die Größen $T=u_0-t$, $b=\frac{\alpha_1}{\lambda}$, und die Koordinatentransformation $y=b\,y'$ eingeführt.

Man erhält damit:

$$u=u_0-\left(T-\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(21).$$

Mit Benützung von Gl. (6), (9), (11) und (12) ist dann

$$u=u_0-F(x,0,z)+\frac{1}{2}\varphi(x,z)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^z K_0(z,\zeta)\,\varphi(x,\zeta)\,d\zeta\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(22).$$

Alle für die Gasperiode abgeleiteten Ergebnisse lassen sich natürlich ohne weiteres auf die Windperiode übertragen.

6. Beharrungszustand. Mit Gl. (6) und (19) kann nun der Beharrungszustand durch verschiedene Ansätze gefunden werden, die alle darauf hinausgehen, die zunächst beliebig angenommene Funktion $f(x,y)$ als Funktion dieses Zustandes zu bestimmen. So kann man z. B. durch zweimalige Anwendung der gefundenen Lösung eine Gleichung $f(x,y)$ aufstellen, die aussagt, daß im Beharrungszustande nach zwei Perioden wieder die gleiche Temperaturverteilung im Stein herrschen muß. Oder man könnte die während der Gasperiode vom Gas abgegebene Wärmemenge gleich der während der Windperiode vom Wind aufgenommenen setzen. Wenn die entsprechenden Voraussetzungen gegeben sind, kann die einfachste Gleichung für $f(x,y)$ durch Ausdehnung der Nußeltschen Symmetriebezeichnung[20]) auf zwei Koordinaten gewonnen werden. Alle diese Ansätze aber führen auf ein System Volterrascher Integralgleichungen mit den drei unabhängig veränderlichen x, y und z und den gesuchten Funktionen $\varphi(x,z)$ und $f(x,y)$, dessen Lösung weit umständlicher und langwieriger ist, als wenn man folgenden Weg zur Festlegung des Beharrungszustandes einschlägt. Man schätzt oder ermittelt mit einer Näherungsrechnung für die gegebenen Daten den Wirkungsgrad des Winderhitzers und erhält dadurch überschlägig den Temperaturanstieg bzw. -abfall im Stein. Unter Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit mit der Tiefe des Steins macht man damit und auf Grund der Wärmeübergangszahlen und der hindurchströmenden Wasserwerte eine Annahme über die Temperaturverteilung am Ende einer Periode. Ausgehend von diesem Temperaturverlauf rechnet man nun mit Gl. (6) und (19) mehrere Perioden durch, bis sich die Temperaturen am Ende einer Periode nicht mehr ändern. Je nach der Annahme des Ausgangszustandes muß die Rechnung drei- bis viermal gemacht werden.

7. Umformung der Integralgleichung (17) zum Zwecke der rascheren Konvergenz. Bevor man mit der Durchrechnung eines Zahlenbeispiels beginnen kann, muß Gl. (17) etwas umgeformt werden. Durch das angegebene Lösungsverfahren würde nämlich in ihrer jetzigen Form für φ eine alternierende Reihe entstehen, ähnlich der für e^{-x}. Da nun x für ein praktisches Beispiel ziemlich groß werden kann, z. B. gleich 20, so würden die einzelnen Glieder dieser Reihe zuerst stark anwachsen und erst nach dem 20. Glied wieder abnehmen. Dazu kommt noch, daß der an und für sich kleine Summenwert der Reihe durch Addition und Subtraktion dieser großen Werte entsteht. An eine praktische Rechnung wäre also nicht zu denken. Man kann sich übrigens leicht von dieser Tatsache überzeugen, wenn man in Gl. (17) $z=0$ setzt. Man erhält dann

$$\varphi(x,0)=2\,F(x,0,0)-\int_0^x\varphi(\xi,0)\,d\xi\,.$$

[19]) Vgl. E. Goursat, Cours d'analyse mathématique Tome III. Paris 1927. S. 332.
[20]) Siehe Nußelt, Der Beharrungszustand im Winderhitzer Gl. (6).

Nimmt man jetzt noch überschlägig $2\,F(x,0,0)$ einmal als konstant gleich a an, so entsteht

$$\psi(x) = a - \int_0^x \psi(\xi)\,d\xi\,.$$

Diese Gleichung würde mit der beschriebenen Methode Gl. (18) die Reihe für $a \cdot e^{-x}$ als Lösung ergeben.

Die Umwandlung, die nun angewendet werden soll[22]) hat zunächst nur formale Bedeutung. Sie gewinnt aber in dem vorliegenden Falle eine unmittelbar praktische, da die dadurch entstehende Gleichung durch Differenzieren gelöst werden kann. Die folgende Bezeichnung werde in Gl. (17) eingeführt:

$$T_0(x,z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^z K_2(z,\zeta)\,\varphi(x,\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\int_0^z K_1(z,\zeta)\,\varphi(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta + 2\,F(x,0,z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

$T_0(x,z)$ wird vorübergehend als bekannte Funktion vorausgesetzt, worin z ein konstanter Parameter sei. Gl. (17) geht damit über in die Integralgleichung

$$\varphi(x,z) = -\int_0^x \varphi(\xi,z)\,d\xi + T_0(x,z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Gl. (24) nach x differenziert gibt:

$$\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial x} = -\varphi(x,z) + \frac{\partial T_0(x,z)}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Diese Gleichung kann nun leicht nach den Regeln für die totale lineare Differentialgleichung 1. Ordnung durch Variation der Konstanten integriert werden. Unter Berücksichtigung der aus Gl. (24) folgenden Bedingung, daß für $x=0$, $\varphi = T_0$ sein muß, wird

$$\varphi(x,z) = T_0(x,z) - e^{-x}\int_0^x T_0(\xi,z)\,e^{+\xi}\,d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Ersetzt man jetzt $T_0(x,z)$ wieder durch den Ausdruck (23), dann ist Gl. (27) durch diese Art partieller Integration übergegangen in

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Bigg[&e^{-x}\int_0^x\int_0^z K_2(z,\zeta)\,\varphi(\xi,\zeta)\,e^{+\xi}\,d\xi\,d\zeta - e^{-x}\int_0^x\int_0^\xi\int_0^z K_1(z,\zeta)\,\varphi(\xi',\zeta)\,e^{-\xi}\,d\xi\,d\xi'\,d\zeta\\ &+\int_0^x\int_0^z K_1(z,\zeta)\,\varphi(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta - \int_0^z K_2(z,\zeta)\,\varphi(x,\zeta)\,d\zeta\Bigg]\\ &+2\,F(x,0,z) - e^{-x}\int_0^x 2\,F(\xi,0,z)\,e^{+\xi}\,d\xi\end{aligned}\right\} \quad (27).$$

Zur Lösung dieser Gleichung kann genau so verfahren werden wie mit Gl. (17). Es ist hier

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(x,z) &= 2\,F(x,0,z) - e^{-x}\int_0^x 2\,F(\xi,0,z)\,e^{+\xi}\,d\xi\\ \varphi_1(x,z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Bigg[e^{-x}\int_0^x\int_0^z K_2(z,\zeta)\,\varphi_0(\xi,\zeta)\,e^{+\xi}\,d\xi\,d\zeta - e^{-x}\int_0^x\int_0^\xi\int_0^z K_1(z,\zeta)\,\varphi_0(\xi',\zeta)\,e^{-\xi}\,d\xi\,d\xi'\,d\zeta\\ &\qquad + \int_0^x\int_0^z K_1(z,\zeta)\,\varphi_0(\xi,\zeta)\,d\xi,\,d\zeta - \int_0^z K_2(z,\zeta)\,\varphi(x,\zeta)\,d\zeta\Bigg]\\ \varphi_2(x,z) &= \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{usw.}\end{aligned}\right\} \quad (28).$$

Diese Reihe für $\varphi(x,z)$ konvergiert nun so, daß sie in dem gewählten Beispiel größtenteils schon nach dem fünften Gliede abgebrochen werden kann.

[22]) Vgl. Volterra, S. 76.

8. Zahlenbeispiel. Für den folgenden praktischen Fall wird die Temperaturverteilung im Stein, der Wirkungsgrad und der maximale Temperaturabfall der erwärmten Luft berechnet. Die gesamte Gitterheizfläche des Winderhitzers sei $F = 6000 \text{ m}^2$. Sein Steingewicht betrage 300000 kg. Wenn das spezifische Gewicht der Steine zu $\gamma = 2000$ kg/m³ angenommen wird, dann ist die Stärke der zu betrachtenden Platte

$$c = \frac{300000}{2000 \cdot 6000} = 0{,}025 \text{ m}\,.$$

Ihre Wärmeleitzahl sei $\lambda = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{m, h, }^0\text{C}}$. Die durch den Winderhitzer strömenden Gase haben in beiden Perioden den gleichen Wasserwert $W_1 = W_2 = 6000$ kcal/h °C. Als mittlere Wärmeübergangszahl werde für die Gasperiode $\alpha_1 = 20$ und für die Windperiode $\alpha_2 = 10 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\text{ h }^0\text{C}}\right)$ gewählt. Die Dauer der Perioden sei ferner in beiden Fällen gleich groß, und zwar $z_1' = z_2' = 2$ h. Die spezifische Wärme des Speichermaterials soll noch zu $c' = 0{,}2 \frac{\text{kcal}}{{}^0\text{C kg}}$ angenommen werden.

Mit diesen Zahlen und der getroffenen Koordinatentransformation bewegt sich während der Gasperiode

$$x \text{ zwischen } 0 \text{ und } x_1 = \frac{\alpha_1 \cdot F}{W_1} = 20,$$

$$y \text{ zwischen } 0 \text{ und } y_1 = \frac{\alpha_1 \cdot c}{\lambda} = 0{,}5,$$

$$z \text{ zwischen } 0 \text{ und } z_1 = a^2 \frac{\alpha_1^2 z_1'}{\lambda^2} = 2$$

und während der Windperiode

$$x \text{ zwischen } 0 \text{ und } x_2 = \frac{\alpha_2 \cdot F}{W_2} = 10,$$

$$y \text{ zwischen } 0 \text{ und } y_2 = \frac{\alpha_2 \cdot c}{\lambda} = 0{,}25,$$

$$z \text{ zwischen } 0 \text{ und } z_2 = a^2 \frac{\alpha_2^2 . z_2'}{\lambda^2} = 0{,}5\,.$$

Ausgehend von einer auf Grund des geschätzten Wirkungsgrades $\eta = 0{,}9$ angenommenen Temperaturverteilung wurden mit Gl. (6) und (27) nacheinander vier Perioden durchgerechnet, bis sich die Steintemperaturen an der dritten Dezimalstelle kaum mehr änderten. Die bestimmten Integrale wurden dabei graphisch ermittelt.

Um die Konvergenz der Reihe $\varphi(x, z)$ Gl. (27), (28) zu zeigen, sind aus der Berechnung der letzten Gasperiode, an der Stelle $x = 10$, die einzelnen Glieder in Zahlentafel 1 angegeben.

Zahlentafel 1.

	$z = 0$	$z = 0{,}5$	$z = 1{,}0$	$z = 1{,}5$	$z = 2{,}0$
φ_0	0,100	0,0994	0,0991	0,0989	0,0988
φ_1	0	0,0319	0,0472	0,0563	0,0616
φ_2	0	0,0056	0,0146	0,0251	0,0325
φ_3	0	0,0004	0,0014	0,0039	0,0103
φ_4	0	0,0000	0,0001	0,0002	0,0014
$\varphi(x = 10, z)$	0,100	0,137	0,162	0,184	0,205

Die Rechnung ergab nun für den Beharrungszustand des gegebenen Winderhitzers die in Zahlentafel 2 wiedergegebene und in Abb. 3 dargestellte Temperaturverteilung. Für die Gasperiode sind die Temperaturen noch nach einer Zwischenzeit von einer Viertelstunde und einer Stunde angegeben.

Versteht man unter $w \left(\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2}\right)$ den auf 1 m² Heizfläche treffenden Wasserwert des Steinmaterials, so ist die während der Gasperiode gespeicherte Wärmemenge

$$Q_{sp} = \frac{F\,w}{x_1\,y_1}\left[\int_0^{x_1}\int_0^{y_1} t_{z=z_1}\,d\,x\,d\,y - \int_0^{x_1}\int_0^{y_1} t_{z=0}\,d\,x\,d\,y\right] = 5180 \text{ kcal}.$$

Der Wirkungsgrad des Winderhitzers ist damit

$$\eta = \frac{Q_{sp}}{W} = 0{,}863 \;\; (W = W_1 = W_2)\,.$$

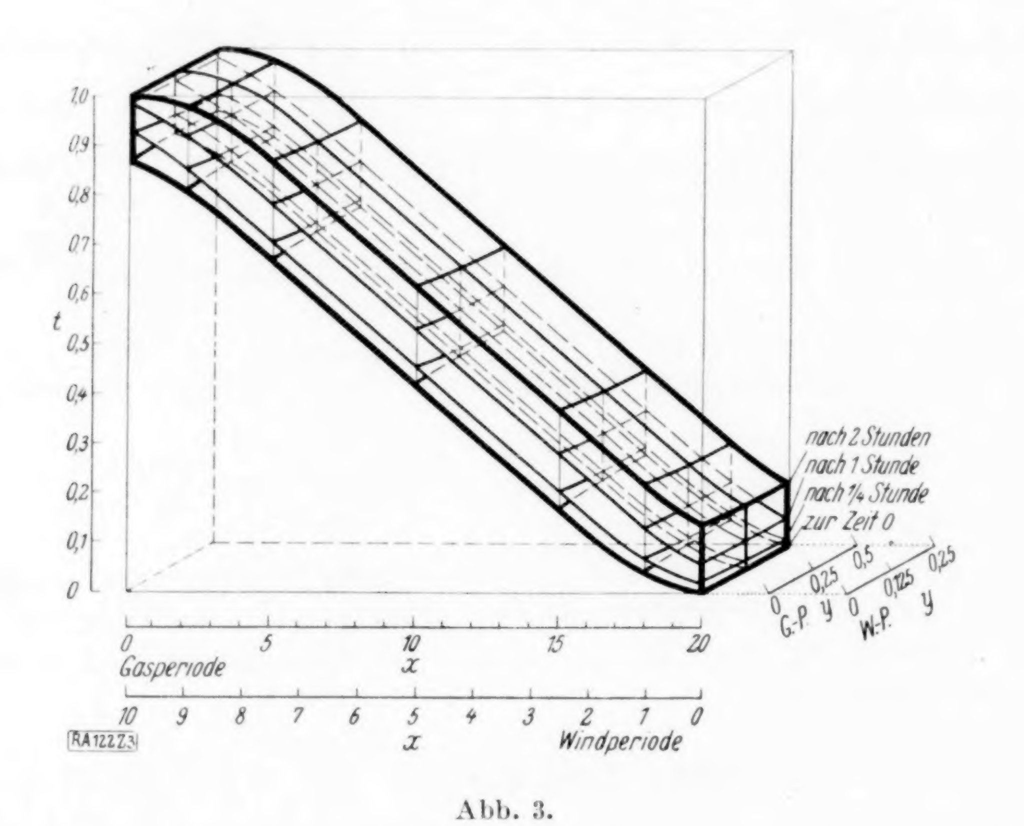


Abb. 3.

Zahlentafel 2.

Temperaturverteilung im Stein während des Beharrungszustandes.

Ende Windperiode.

	10	9	7,5	5	2,5	1	0	$= x$
$y = 0$	0,869	0,811	0,672	0,420	0,171	0,041	0,0022	
$y = 0{,}125$	0,875	0,820	0,679	0,429	0,180	0,048	0,0035	
$y = 0{,}25$	0,876	0,822	0,682	0,431	0,183	0,050	0,0040	

Nach 15 Minuten Gasperiode.

$x =$	0	2	5	10	15	18	20
$y = 0$	0,930	0,853	0,706	0,456	0,205	0,068	0,017
$y = 0{,}25$	0,916	0,844	0,697	0,445	0,196	0,061	0,012
$y = 0{,}5$	0,910	0,841	0,694	0,443	0,194	0,059	0,010

Nach einer Stunde Gasperiode.

$y = 0$	0,983	0,918	0,783	0,533	0,283	0,131	0,060
$y = 0{,}25$	0,980	0,914	0,773	0,523	0,273	0,127	0,056
$y = 0{,}5$	0,979	0,913	0,771	0,520	0,271	0,125	0,055

Ende Gasperiode.

$y = 0$	0,9996	0,980	0,873	0,620	0,371	0,221	0,133
$y = 0{,}25$	0,9983	0,977	0,863	0,613	0,364	0,213	0,126
$y = 0{,}5$	0,9978	0,975	0,861	0,610	0,360	0,210	0,123

Der maximale Temperaturabfall des Windes ergibt sich zu

$$v_{\substack{z=0 \\ x=x_2}} - v_{\substack{z=z_2 \\ x=x_2}} = 0{,}171.$$

Die Heiligenstaedtsche Rechnung würde in diesem Falle einen Wirkungsgrad von 0,804 ergeben.

9. Schlußbemerkung. Die gefundenen Beziehungen in Gl. (6) und (27) lassen eine Diskussion der einzelnen Bestimmungsgrößen wegen ihrer Undurchsichtigkeit nicht zu. Man wird daher die zu untersuchenden Gesetzmäßigkeiten nur durch Rechnen der in Frage kommenden Fälle studieren können. Auf Grund der eingeführten Koordinatentransformation kann man jedoch das eine mit Sicherheit sagen, daß in dem behandelten Beispiel alle Winderhitzer eingeschlossen sind, welche bei sonst gleichen Verhältnissen den gleichen Wert des Bruches: Heizfläche durch hindurchfließenden Wasserwert, also $\frac{F}{W}$ $(W = W_1 = W_2)$ besitzen. Alle diese Winderhitzer haben also den ermittelten Wirkungsgrad 0,863.

Die zahlenmäßige Durchrechnung hat gezeigt, daß bei großer Periodendauer und geringer Stärke der Platte die Temperaturabhängigkeit mit der Tiefe des Steins vernachlässigt werden kann, daß also mit anderen Worten in solchen Fällen die Nußeltschen Gleichungen für $\lambda = \infty$ senkrecht zur Strömungsrichtung der Gase verwendet werden können[23]).

Gleichzeitig bietet diese Tatsache die Handhabe zu einer bedeutenden Vereinfachung der Rechnung. Man kann nämlich damit mit großer Annäherung die Reihenentwicklung nach Fourier, welche die Funktion $F(x, y, z)$ Gl. (6) verlangt, durch eine einfache Mittelwertbildung der Temperaturen in den Schnitten $x = \text{const}$ ersetzen.

10. Zusammenfassung. Für die der praktischen Ausführung am nächsten kommenden Annahmen, also Wärmeleitfähigkeit in Richtung des Gasstromes gleich Null und senkrecht dazu von endlicher Größe, wird eine strenge analytische Lösung der Vorgänge in den Wärmeaustauschern mit Speicherung, für eine beliebig gegebene, stetige Anfangstemperaturverteilung entwickelt. Die in der Lösung enthaltene Integralgleichung wird durch eine Art partieller Integration umgeformt und damit erst eine praktische Rechnung ermöglicht.

Mit den gefundenen Gleichungen wird für ein Zahlenbeispiel die Temperaturverteilung im Stein, der Wirkungsgrad des Winderhitzers und der Temperaturabfall des vorgewärmten Windes, im Beharrungszustand ermittelt. 122

11. Literaturverzeichnis.

1. Nußelt, W.: Die Theorie des Winderhitzers. Z. d. V. d. I. 1927, S. 85.
2. Nußelt, W.: Der Beharrungszustand im Winderhitzer. Z. d. V. d. I. 1928, S. 1052.
3. Riemann-Weber: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. I. u. II. 7. Auflage. Braunschweig 1927.
4. Volterra, V.: Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles. Paris 1913.
5. Goursat, E.: Cours d'analyse mathématique. Tome III. Paris 1927.
6. Hausen, H.: Über die Theorie des Wärmeaustausches in Regeneratoren. Habilitationsschrift 1927, Technische Hochschule München.
7. Hausen, H.: Wärmeaustausch in Regeneratoren. Z. d. V. d. I. 1929, S. 432.
8. Schmeidler, W.: Mathematische Theorie der Wärmespeicher. Zeitschr. für angewandte Mathematik und Mechanik, 1928, S. 385.
9. Gröber, H.: Zur Theorie und Berechnung der Winderhitzer. Zeitschr. Stahl und Eisen, 1924, Nr. 2.
10. Heiligenstaedt, W.: Die Berechnung von Wärmespeichern. Archiv für das Eisenhüttenwesen, 1928, Heft 4, S. 217.
11. Rummel, K.: Die Berechnung der Wärmespeicher auf Grund der Wärmedurchgangszahl. Zeitschr. Stahl und Eisen, 1928, S. 1712.
12. Schack, A.: Der industrielle Wärmeübergang. Verlag Stahleisen, 1929.
13. Preußler, H.: Zur Theorie und Berechnung von Wärmespeichern und Winderhitzern. Dissertation Breslau 1920.
14. Osann, B.: Lehrbuch der Eisenhüttenkunde. Leipzig 1915.

[23]) Gilt vor allem für den Ljungström-Luftvorwärmer.

Die Bewegungsgleichungen des rollenden Rades.

Von *H. Lenk*, Wien.

I. Stellung der Aufgabe.

Ein wichtiges Element der meisten Landfahrzeuge ist das Rad oder ein radähnlicher Rollkörper. Es ist daher berechtigt, wenn man sich heute in der Zeit der schnellaufenden Automobile als Grundlage für gewisse Untersuchungen auch ein wenig mit der bisher stark vernachlässigten Mechanik des nicht zwangläufig geführten Rades befaßt.

In diesem Sinne nehmen wir uns vor, die Bewegungsgleichungen eines Rades aufzustellen, das sich unter dem Einfluß beliebiger Kräfte und Momente, die teilweise auch vom Eigengewichte herrühren können, auf einer vollkommen starren und zunächst ebenen Unterlage bewegt. Der Einfluß von Bodenunebenheiten soll im Laufe der Untersuchung durch einen Kunstgriff berücksichtigt werden.

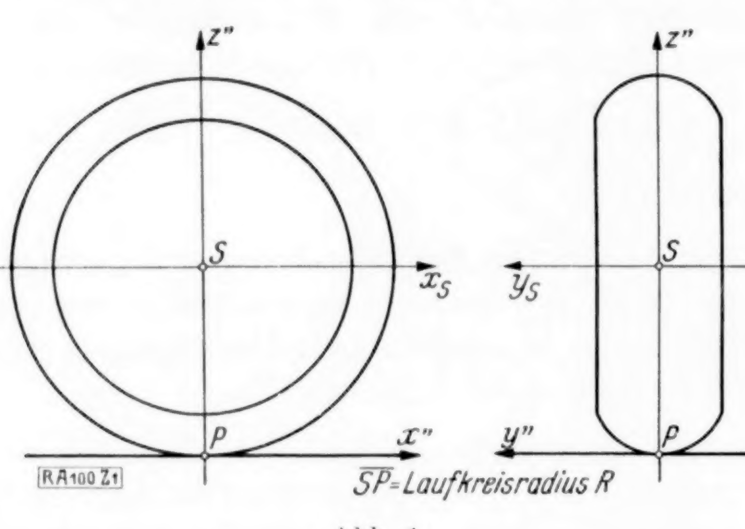


Abb. 1.

Das untersuchte Rad sei ein Rotationskörper mit der Achse y_s, Abb. 1, dessen Lauffläche vollkommen starr und symmetrisch derartig gestaltet ist, daß bei einer Neigung um die Achse x'' der Berührungspunkt mit dem Boden P nur um eine vernachlässigbar kleine Strecke aus der Mittelsymmetrieebene z'' x'' rückt. Der Symmetrie halber sind die Achsen z'', x_s und y_s Hauptträgheitsachsen; die entsprechenden Trägheitsmomente heißen J_z'' J_{xs} und J_p. Ebenfalls Hauptträgheitsmomente sind diejenigen um die Achsen y'' und x'', nämlich J_y'' und J_x'', zwischen ihnen bestehen die Beziehungen:

$$J_y'' = J_p + MR^2$$

$$J_{xs} = J_z''$$

$$J_x'' = J_{xs} + MR^2 = J_z'' + MR^2$$

M = gesamte Radmasse

R = Laufkreisradius

Um die Lage des Rades zu bestimmen, sei in der horizontalen Ebene E, auf der es sich bewegen soll, ein Bezugspunkt O als Ursprung des rechtwinkeligen, im Raume vorderhand ruhenden Rechtskoordinatensystems XYZ, kurz System I genannt, angenommen, dessen

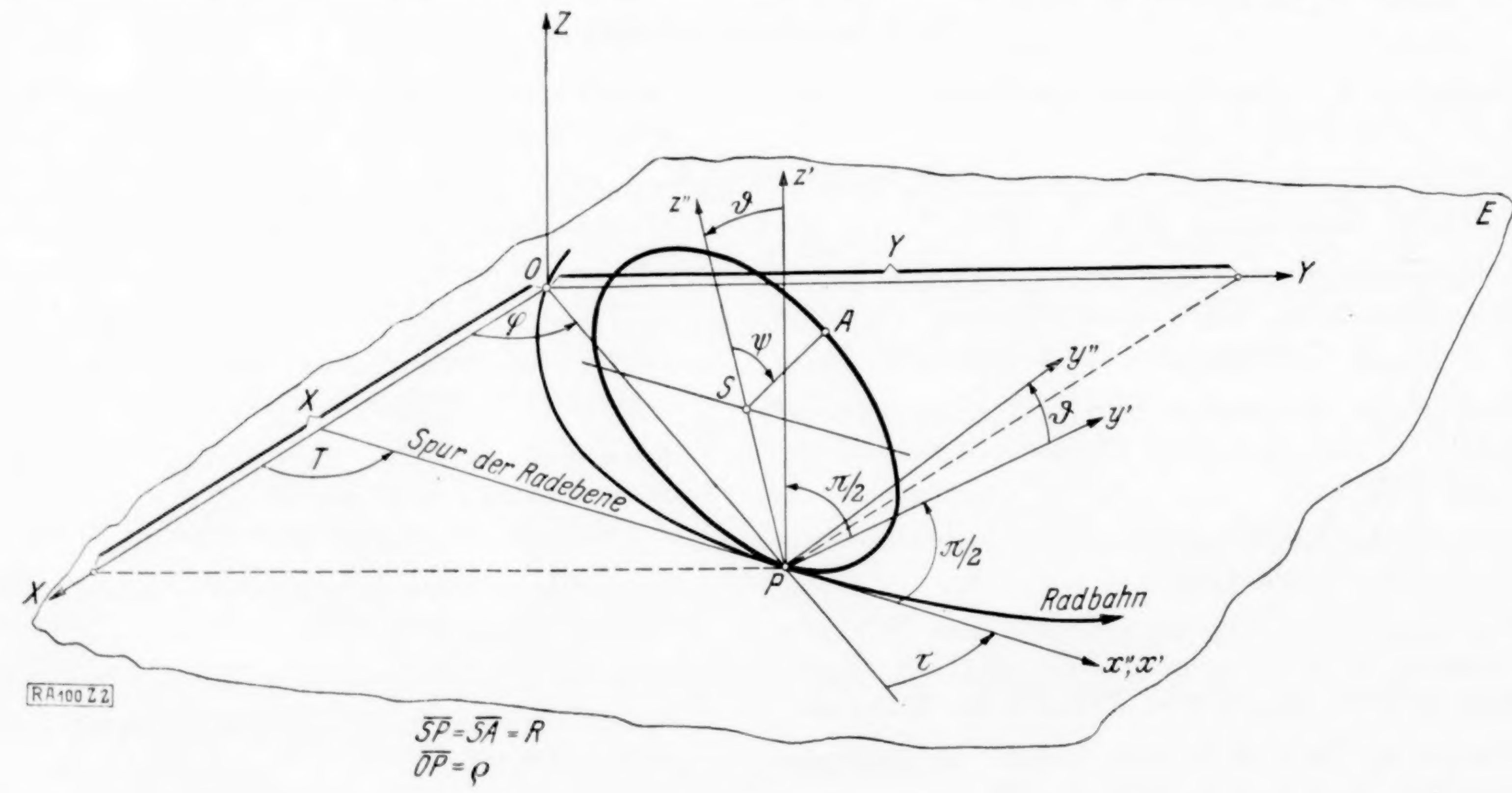


Abb. 2.

Achsen X und Y in der Ebene E liegen. Der Bodenberührungspunkt P ist dann durch die Angabe der Koordinaten X und Y festgelegt. Will man sich der Polarkoordinaten bedienen, so möge der Fahrstrahl $\overline{OP}$ durch das Wertepaar ϱ und φ, Abb. 2, gekennzeichnet sein.

Den Punkt P selbst machen wir zum Nullpunkt eines zweiten rechtwinkeligen Systems $x' y' z'$ (System II), welches so liegt, daß x' die Schnittgerade der Radebene und der Ebene E, z' parallel zu Z und y' senkrecht auf x' und z', und zwar in der Achsfolge eines Rechtssystems, ist. Die Richtung von x' gegenüber X des Systems I gibt der Winkel T an, diejenige von x' gegen den Fahrstrahl $\overline{OP}$ sei durch den Winkel τ festgelegt.

Ein drittes rechtwinkeliges System $x'' y'' z''$ (System III) ist so definiert, daß sein Ursprung wieder nach P fällt, x'' mit x' koinzidiert, y'' aber in der Ebene $z'\, y'$ den Winkel ϑ mit y' einschließt und z'' gemäß einem Rechtssystem senkrecht auf die beiden anderen Achsen folgt. $(z'' x'')$ ist dabei die Radebene. Die Lage eines Punktes im Laufkreis des Rades bestimmt der Winkel ψ des betreffenden Kreisradius mit der Richtung der positiven z'' als zyklische Koordinate. Alle Winkel sind positiv im Sinne des in Abb. 2 eingezeichneten Pfeiles zu zählen.

Wenn man voraussetzt, daß sich der Punkt P auf E ganz unabhängig von der Lage des Rades frei bewegen kann, so ist diese Lage insgesamt durch die fünf Koordinaten X, Y, Z, ϑ, ψ bzw. ϱ, φ, τ, ϑ, ψ vollkommen eindeutig festgelegt. Soll die Bewegung des Rades eine rein rollende sein, was nur bei genügend großer Reibung zwischen Rad und Boden der Fall ist, dann können bei Übergang von einer Lage des Rades zur benachbarten nur mehr drei von den fünf Lagekoordinaten unabhängig verändert werden. Man kann z. B. X, Y und ϑ variieren, hat aber dadurch im Verein mit der Bedingung, daß das Rad rollen soll, bereits den Winkel T und auch die Änderung von ψ gegeben. Man sagt kurz in einer bekannten Ausdrucksweise, das vollkommen freie, reibungslose Rad hat fünf, das rollende bloß drei Freiheitsgrade.

Die Gleichungen, welche die Freiheitsgrade des rollenden Rades einschränken, sind solche zwischen Differentialen und im allgemeinen nicht integrierbar. Sie bewirken, daß Bewegungen, welche ihnen gehorchen müssen und die seit Hertz „Nicht holonome" genannt werden, mathematisch komplizierter zu behandeln sind als solche mit endlichen Bedingungsgleichungen. Die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art, wie sie die analytische Mechanik zur Behandlung schwierigerer Probleme anwendet, sind z. B. in ihrer ursprünglichen Form nicht anwendbar, es muß vielmehr im Laufe ihrer Ableitung eine kleine Änderung vorgenommen werden, um sie für Berechnung nicht holonomer Bewegungen brauchbar zu machen.

Da diese Zusätze wenig bekannt sind und den Methoden der Lagrangeschen Analytik eine gewisse Unanschaulichkeit eigentümlich ist, sollen im folgenden die Bewegungsgleichungen für ein Rad nach den Gesetzen der Relativbewegung, wie sie die Galilei-Newtonsche Mechanik kennt, aufgestellt werden. Dieser Weg ist vielleicht etwas umständlich, weist hingegen den Vorzug auf, daß die Bedeutung der einzelnen Glieder der Bewegungsgleichungen aus der Ableitung klar hervorgehen und die Form derselben für technische Anwendungen sehr brauchbar wird. Außerdem lassen sich sämtliche Reibungen und auch störende Einflüsse verschiedener Art, wenigstens in den Ansätzen, mühelos berücksichtigen.

II. Ableitung der Bewegungsgleichungen.

1. Grundlegende Beziehungen. Wir denken uns einen Beobachter, der sich mit dem System II $(x' y' z')$ mitbewegt. Wie wird die Radbewegung nach dessen Aussagen verlaufen? Offenbar sieht er ein Rad, welches sich so um seine Mittelpunktachse y_s dreht, daß der Bodenberührungspunkt P relativ zum System II, also auch zum Beobachter, ruht. Gleichzeitig neigt es sich um die Schnittgerade seiner eigenen Ebene mit der Unterstützungsebene E, wobei auch diese Schnittgerade ihre Lage im Raum II beibehält. Für diese relativ zum mitbewegten Beobachter einfache Bewegung sind die Gleichungen leicht aufzustellen.

Die Bewegung erfolgt unter dem Einfluß der auf den Schwerpunkt S reduzierten „relativen" Kräfte $\Sigma \overline{P}'$ und „relativen Momente" $\Sigma \overline{D}_P'$, für die der Punkt P als Bezugspunkt gelten soll. Die Grundgleichungen sind dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2(\overline{PS})}{dt^2} &= \Sigma \overline{P}' \\ \frac{d\mathfrak{B}}{dt} &= \Sigma \overline{D}_P' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

worin $\mathfrak{B}$ den auf den Punkt P bezogenen relativen Drall (Impulsmomentvektor) $\Sigma\, d\, m\, [\overline{r}\, \overline{v}]$ und $\overline{PS}$ den Schwerpunktsabstand von P bedeutet.

In P' und D' stecken außer den äußeren Kräften und Momenten auch noch diejenigen der Ergänzungskräfte, die man anbringen muß, um die Gleichungen der Mechanik in Bezugssystemen anwenden zu können, die sich relativ zum festen Raum (hier System I) be-

wegen. Und zwar sind diese Zusatzkräfte, weil II gegen I sowohl eine Schiebung als auch eine Drehung ausführt, zum Teil sogenannte Führungskräfte $\overline{P}_F$ und von diesen hervorgerufene Momente $\overline{D}_F$, zum andern Teil Corioliskräfte und Momente von diesen, P_c und D_c.

Schreibt man jetzt unter Berücksichtigung des eben Gesagten, die Gl. (1) nach den Koordinaten des Systems II zerlegt, so erhält man, wenn $x_s'\ y_s'\ z_s'$ die Schwerpunktskoordinaten und die unterstrichenen Größen die absoluten Kräfte bzw. Momente bedeuten,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 x_s'}{dt^2} &= \underline{\Sigma P_x'} + P_{Fx'} + P_{cx'} \\
\frac{d^2 y_s'}{dt^2} &= \underline{\Sigma P_y'} + P_{Fy'} + P_{cy'} \\
\frac{d^2 z_s'}{dt^2} &= \underline{\Sigma P_z'} + P_{Fz'} + P_{cz'} \\
\frac{d\mathfrak{B}_x'}{dt} &= \underline{\Sigma D_{x'P}} + D_{Fx'P} + D_{cx'P} \\
\frac{d\mathfrak{B}_y'}{dt} &= \underline{\Sigma D_{y'P}} + D_{Fy'P} + D_{cy'P} \\
\frac{d\mathfrak{B}_z'}{dt} &= \underline{\Sigma D_{z'P}} + D_{Fz'P} + D_{cz'P}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Nun ist es leicht, die $x_s'\ y_s'\ z_s'$ und die Komponenten von $\mathfrak{B}$ als Funktionen der oben festgestellten unabhängigen Variablen auszudrücken. Aus Abb. 2 entnimmt man für die Schwerpunktskoordinaten ohne Mühe die Werte

$$\left.\begin{aligned}
x_s' &= 0 \\
y_s' &= -R\sin\vartheta \\
z_s' &= R\cos\vartheta
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Darin ist R der Laufkreisradius des Rades und ϑ der Neigungswinkel desselben gegen die Vertikale, so wie früher definiert.

Da die Achsen $x''\ y''$ und z'' Hauptträgheitsachsen sind, lassen sich die Drallkomponenten nach diesen leicht berechnen, und zwar ist

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{B}_x'' &= \omega_x''\, J_x'' = \frac{d\vartheta}{dt} J_x'' \\
\mathfrak{B}_y'' &= \omega_y''\, J_p = \frac{d\psi}{dt} J_p \\
\mathfrak{B}_z'' &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeiten um die entsprechende Achsen bedeuten sollen. Daß $\mathfrak{B}_z''$ gleich Null ist, folgt daraus, daß eine Drehung um die z''-Achse dank der Wahl des Koordinatensystems nicht stattfindet. Man könnte auch versucht sein, in der zweiten Gleichung von (4) statt J_p, J_y'' zu schreiben, überzeugt sich aber durch Zurückgehen auf die eigentliche Definition des Dralles leicht von der Richtigkeit der Gl. (4).

Aus diesen findet man die Drallkomponenten im System II

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{B}_x' &= \mathfrak{B}_x'' = \omega_x''\, J_x'' = \omega_x'\, J_x' \\
\mathfrak{B}_y' &= \mathfrak{B}_y'' \cos\vartheta = \omega_y''\, J_p \cos\vartheta \\
\mathfrak{B}_z' &= \mathfrak{B}_y'' \sin\vartheta = \omega_y''\, J_p \sin\vartheta
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Setzt man jetzt (3) und (5) in (2) ein und schreibt wieder $\omega_x' = \dfrac{d\vartheta}{dt}$, so erhält man als vorläufige Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \underline{\Sigma P_x'} + P_{fx}' + P_{cx}' \\
-R\frac{d^2(\sin\vartheta)}{dt^2} &= \underline{\Sigma P_y'} + P_{fy}' + P_{cy}' \\
R\frac{d^2(\cos\vartheta)}{dt^2} &= \underline{\Sigma P_z'} + P_{fz}' + P_{cz}'
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\left.\begin{aligned}&J_x''\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=\Sigma D_{x'P}+D_{fx'P}+D_{cx'P}\\&J_p\cos\vartheta\frac{dw_y''}{dt}-J_p\,\omega_y''\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}=\underline{\Sigma D_{y'p}}+D_{fy'P}+D_{cy'P}\\&J_p\sin\vartheta\frac{dw_y''}{dt}+J_p\,\omega_y''\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}=\underline{\Sigma D_{z'P}}+D_{fz'P}+D_{cz'P}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(6').$$

2. Die Zusatzkräfte. a) Die Führungskräfte $\overline{P}_f$. Es ist allgemein $\overline{P}_f=-\int\bar{b}_f\,dm$, wenn $\bar{b}_f$ die Führungsbeschleunigung eines Punktes des Systems II relativ zu I bedeutet und das Integral über den ganzen Radkörper zu erstrecken ist. Es besteht nun die Beziehung

$$\bar{b}_f=\bar{b}_{fP}+\bar{b}_{AP}=\bar{b}_X+\bar{b}_Y+\bar{b}_{AP}=\bar{b}_\varrho+\bar{b}_\varphi+\bar{b}_{AP}\quad\ldots\ldots\ldots(7).$$

Darin bezeichnet $\bar{b}_{fP}$ die Beschleunigung des Punktes P im System I und $\bar{b}_{AP}$ die Beschleunigung eines Punktes A im Rade gegen P, welche durch die Relativbewegung zwischen I und II verursacht wird. $\bar{b}_X, \bar{b}_Y, \bar{b}_\varrho$ und $\bar{b}_\varphi$ sind die vektoriellen Komponenten von $\bar{b}_{fP}$ in den durch die Indizes gekennzeichneten Richtungen, wobei die Richtung φ senkrecht zu ϱ im Sinne einer positiven Drehung liegt.

Führt man Einheitsvektoren $\bar{e}$ mit Indizes, welche deren Richtung bezeichnen, ein, so ist mit den Koordinaten von P wie in Abb. 2

$$\bar{b}_X=\bar{e}_x\frac{d^2X}{dt^2},\qquad \bar{b}_Y=\bar{e}_y\frac{d^2Y}{dt^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8a)$$

$$\bar{b}_\varrho=\bar{e}_\varphi\left[\frac{d^2\varrho}{dt^2}-\varrho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]=\bar{e}_\varrho\,\Psi,\qquad \bar{b}_\varphi=\bar{e}_\varphi\left[\varrho\frac{d^2\varrho}{dt^2}+2\frac{d\varrho}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right]=\bar{e}_\varphi\,\Phi\ (8b).$$

Hierdurch mögen auch die abkürzenden Größen und Ψ, Φ definiert sein.

Da für (6) die Komponenten von $\overline{P}_f$ und daher auch von $\bar{b}_f$ nach den Achsen x', y', z' benötigt werden, beachte man noch, daß

$$\left.\begin{aligned}e_x'&=e_x\cos T+e_Y\sin T=e_\varrho\cos\tau+e_\varphi\sin\tau\\e_y'&=-e_x\sin T+e_Y\cos T=-e_\varrho\sin\tau+e_\varphi\cos\tau\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(9)$$

und erhält dann leicht mit (8)

$$\left.\begin{aligned}b_{fx'P}&=\frac{d^2X}{dt^2}\cos T+\frac{d^2Y}{dt^2}\sin T=\Psi\cos\tau+\Phi\sin\tau\\b_{fy'P}&=-\frac{d^2X}{dt^2}\sin T+\frac{d^2Y}{dt^2}\cos T=-\Psi\sin\tau+\Phi\cos\tau\\b_{fz'P}&=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(10).$$

Die Beschleunigung $\overline{b_{AP}}$ von einem Punkt A gegen P rührt als Führungsbeschleunigung bloß von der Systemdrehung II gegen I her, deren Vektor in die z-Richtung zeigt und den Geschwindigkeitswert

$$u=\frac{dT}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\tau}{dt}\quad\ldots\ldots(11)$$

hat.

Bezeichnet man mit

$$\bar{r}=\overline{R}+\bar{s}+\bar{\beta};$$

$$\overline{PA}=\bar{r},\quad \overline{PS}=\overline{R},\quad \overline{SH}=\bar{s},\quad \overline{HA}=\bar{\beta}\qquad |\overline{SB}|=|\overline{SB'}|=b$$

den Fahrstrahl $\overline{PA}$ (siehe Abb. 3), dann erhält man für die Komponenten dieser

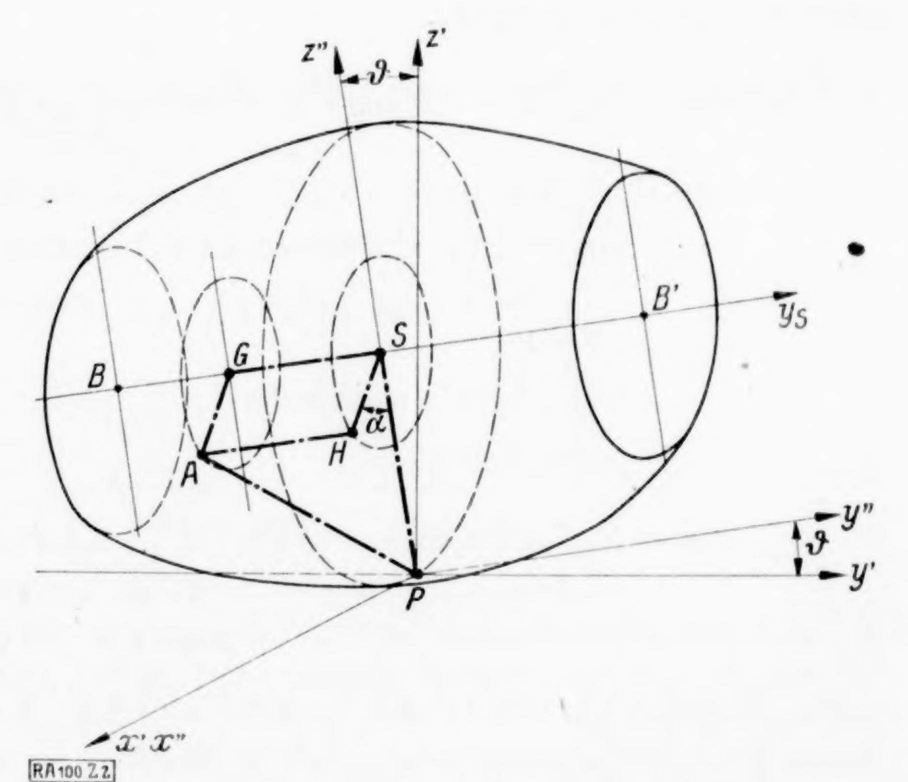


Abb. 3.

Beschleunigung in bekannter Weise als Tangential- und Radialbeschleunigungskomponenten zerlegt die Ausdrücke

$$b_{APx}' = -r_y' \frac{du}{dt} - r_x' u^2$$

$$b_{APy}' = r_x' \frac{du}{dt} - r_y' u^2$$

$$b_{APz}' = 0.$$

Nun ist aber aus Abb. 3 leicht abzulesen

$$\left.\begin{array}{lll} R_x' = 0 & s_x' = s \sin a & \beta_x' = 0 \\ R_y' = -R \sin \vartheta & s_y' = s \cos a \sin \vartheta & \beta_y' = \beta \cos \vartheta \\ R_z' = R \cos \vartheta & s_z' = -s \cos a \cos \vartheta & \beta_z' = \beta \sin \vartheta \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (12),$$

daher

$$b_{APx}' = (R \sin \vartheta - s \cos a \sin \vartheta - \beta \cos \vartheta) \frac{du}{dt} - s \sin a\, u^2$$

$$b_{APy}' = s \sin a \frac{du}{dt} + (R \sin \vartheta - s \cos a \sin \vartheta - \beta \cos \vartheta)\, u^2$$

$$b_{APz}' = 0$$

und die gesamten Führungsbeschleunigungen in Verein mit (10) und (11)

$$\left.\begin{array}{l} b_{fx}' = \dfrac{d^2 X}{dt^2} \cos T + \dfrac{d^2 Y}{dt^2} \sin T + \dfrac{d^2 T}{dt^2} (R \sin \vartheta - s \cos a \sin \vartheta - \beta \cos \vartheta) - \left(\dfrac{dT}{dt}\right)^2 s \sin a \\ b_{fy}' = -\dfrac{d^2 X}{dt^2} \sin T + \dfrac{d^2 Y}{dt^2} \cos T + \dfrac{d^2 T}{dt^2} s \sin a + \left(\dfrac{dT}{dt}\right)^2 (R \sin \vartheta - s \cos a \sin \vartheta - \beta \cos \vartheta) \\ b_{fz}' = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad (13)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} b_{fx}' = \Psi \cos \tau + \Phi \sin \tau + \dfrac{du}{dt} (R \sin \vartheta - s \cos a \sin \vartheta - \beta \cos \vartheta) - u^2 s \sin a \\ b_{fy}' = -\Psi \sin \tau + \Phi \cos \tau + \dfrac{du}{dt} s \sin a + u^2 (R \sin \delta - s \cos a \sin \vartheta - \beta \cos \vartheta) \\ b_{fz}' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (13').$$

Die Formeln (13) und (13') geben den **zeitlichen Verlauf der Führungsbeschleunigung für einen Radpunkt** A wieder. Um die Kräfte P_f zu gewinnen, muß nun an die eingangs dieses Kapitels erwähnte **Integration über den ganzen Radkörper** geschritten werden. Wir multiplizieren beispielsweise die Ausdrücke (13') der Reihe nach mit

$$-dm = -\mu s\, ds\, da\, d\beta,$$

worin μ die spezifische Masse des homogen gedachten Radmaterials bedeutet und integrieren über den ganzen Körper

$$-\int_k b_{fx}'\, dm = P_{fx}' = -(\Psi \cos \tau + \Phi \sin \tau) \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu s\, ds\, da\, d\beta - \frac{du}{dt} R \sin \vartheta \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu s\, ds\, da\, d\beta$$

$$- \sin \vartheta \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu s^2\, ds \cos a\, da\, d\beta - \cos \vartheta \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu s\, ds\, da\, \beta\, d\beta$$

$$- u^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu s^2\, ds \sin a\, da\, d\beta$$

$$-\int_k b_{fy}'\, dm = P_{fy}' = (\Psi \sin \tau - \Phi \cos \tau) \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu s\, ds\, da\, d\beta - \frac{du}{dt} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu s^2\, ds \sin a\, da\, d\beta$$

$$- u^2 \left[R \sin \vartheta \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu s\, ds\, da\, d\beta - \sin \vartheta \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu s^2\, ds \cos a\, da\, d\beta - \cos \vartheta \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu s^2\, ds\, da\, \beta\, d\beta \right]$$

$$-\int b_{fz}'\, dm = P_{fz}' = 0.$$

Alle vorkommenden Integrale sind vom Typus eines der im folgenden angeführten, von deren richtiger Auswertung man sich leicht überzeugt

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu\, s^2\, ds \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} d\alpha\, d\beta = 0 \quad \ldots \quad (14)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu\, s\, ds \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} d\alpha\, d\beta = 0 \quad \ldots \quad (15)$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu\, s\, ds\, d\alpha\, \beta\, d\beta = 0 \quad \ldots \quad (16).$$

Gesamtmaße des Rades

$$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \mu\, s\, ds\, d\alpha\, d\beta \quad \ldots \quad (17).$$

Man erhält so für P_f die verhältnismäßig einfachen Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} P_{fx'} &= -(\Psi\cos\tau + \Phi\sin\tau)\, M - \frac{du}{dt}\, R\, M\sin\vartheta \\ P_{fy'} &= (\Psi\sin\tau - \Phi\cos\tau)\, M - u^2\, R\, M\sin\vartheta \\ P_{fz'} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17')$$

oder

$$\left.\begin{aligned} P_{fx'} &= -\left(\frac{d^2X}{dt^2}\cos T + \frac{d^2Y}{dt^2}\sin T\right) M - \frac{d^2T}{dt^2}\, R\, M\sin\vartheta \\ P_{fy'} &= \left(\frac{d^2X}{dt^2}\sin T - \frac{d^2Y}{dt^2}\cos T\right) M - \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 R\, M\sin\vartheta \\ P_{fz'} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17).$$

b) Die Corioliskräfte. Ähnlich wie im vorigen Abschnitt ist die Corioliskraft $\overline{P_c} = -\int_k \overline{b_c}\, dm$, wenn $\overline{b_c}$ die Coriolisbeschleunigung

$$\overline{b_c} = 2\,[\bar{u}\,\bar{v}_r] \quad \ldots \quad (18)$$

bedeutet und das Integral wieder über das ganze Rad auszuführen ist. In (18) bedeutet $\bar{u}$ die Winkelgeschwindigkeit von System II gegen das im Raum ruhende System I und ist identisch mit der durch Gl. (11) bestimmten Größe. Geht man wieder zur Darstellung mittels Einheitsvektoren über, dann läßt sich auch schreiben

$$\bar{u} = u\,\bar{e}_z',$$

denn der Vektor von $\bar{u}$ zeigt in die z'-Achse. $\bar{v}_r$ ist die Geschwindigkeit, die ein herausgegriffener Punkt A relativ zum System II besitzt.

Wie schon erwähnt, ist $\bar{u} = u\,\bar{e}_z'$ und auch $\bar{v}_r = v_{rx'}\,\bar{e}_x' + v_{ry'}\,\bar{e}_y' + v_{rz'}\,\bar{e}_z'$; daher kann man (18) wie folgt weiterentwickeln

$$\bar{b}_c = 2\,u\,[\bar{e}_z'\,\bar{v}_r] = 2\,u\,v_{rx'}\,\bar{e}_y' - 2\,u\,v_{ry'}\,\bar{e}_x'$$

und erhält endlich

$$\left.\begin{aligned} b_{cx'} &= -2\,u\,v_{ry'} \\ b_{cy'} &= 2\,u\,v_{rx'} \\ b_{cz'} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (19).$$

Zur Berechnung der Relativgeschwindigkeit $\bar{v}_r$ führt folgende Überlegung.

Ist $\bar{r}$ wie früher der Abstandsvektor eines Punktes A vom Bodenberührungspunkt P und $\bar{w}'$ die gesamte Winkelgeschwindigkeit des Rades, wie sie der Beobachter vom System II aus messen kann, so würde $[\bar{w}'\,\bar{r}]$ den Geschwindigkeitsvektor schon richtig angeben, wenn der Radpunkt P im System II ruhen würde. Nun bewegt sich P für unsern angenommenen Beobachter nach dem in Abschnitt II, 1 Gesagten aber mit der Geschwindigkeit $w_y''\,R$ in

Richtung der negativen x'-Achse. Diese Translationsgeschwindigkeit überlagert sich an sämtlichen Radpunkten der von der Drehung herrührenden und man erhält so

$$\bar{v}_r = [\bar{\omega}' \, \bar{r}] - \omega_y'' \, R \, \bar{e}_x' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

oder in Komponenten zerlegt

$$\left.\begin{aligned} v_{rx}' &= \omega_y' \, r_z' - \omega_z' \, r_y' - \omega_y'' \, R \\ v_{ry}' &= \omega_z' \, r_x' - \omega_x' \, r_z' \\ v_{rz}' &= \omega_x' \, r_y' - \omega_y' \, r_x' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Ferner bestehen noch die leicht nachzuweisenden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \omega_x' &= \omega_x' \\ \omega_y' &= \omega_y'' \cos\vartheta \\ \omega_z' &= \omega_y'' \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21').$$

Macht man nun von dem System (12) Gebrauch und setzt (21) in (19) ein, so ergeben sich die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} b_{cx}' &= -2\,u\,[\omega_y'' \, s \sin\alpha \sin\vartheta - \omega_x'' \, (R\cos\vartheta - s\cos\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta)] \\ b_{cy}' &= 2\,u\,[\omega_y'' \cos\vartheta \, (R\cos\vartheta - s\cos\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta) - \omega_y'' \sin\vartheta \, (-R\sin\vartheta + s\cos\alpha\sin\vartheta \\ &\qquad + \beta\cos\vartheta) - \omega_y'' \, R \\ b_{cz}' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (22).$$

Durch Multiplikation mit dem Massenelement $-dm = -\mu \, s \, ds \, d\alpha \, d\beta$ und Integration über den ganzen Radkörper, wobei wieder die Integrale (14) bis (17) auftreten, erhält man dann schließlich

$$\left.\begin{aligned} P_{cx}' &= -2\,u\,\omega_x' \, R \, M \cos\vartheta \\ P_{cy}' &= 0 \\ P_{cz}' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23).$$

Diese sehr einfachen Ausdrücke lehren, daß die Corioliskraft von der Rollbewegung nicht, hingegen wohl von der Fall- und Wendebewegung des Rades abhängt und so zu berechnen ist, als ob der Schwerpunkt mit der gesamten in ihm konzentrierten Radmasse allein vorhanden wäre.

3. Die Zusatzmomente. a) Herrührend von den Führungsbeschleunigungen. Greift die Massenkraft $-b_f \, dm$ an einem beliebigen Punkt mit dem Abstand $\bar{r}$ vom Momentenbezugspunkt P an, so ist das entsprechende Elementarmoment

$$d\,D_f = -[\bar{r} \cdot \bar{b}_f \, dm] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

oder in Komponentendarstellung

$$\left.\begin{aligned} d\,D_{fx}' &= (r_z' \, b_{fy}' - r_y' \, b_{fz}') \, dm \\ d\,D_{fy}' &= (r_x' \, b_{fz}' - r_z' \, b_{fx}') \, dm \\ d\,D_{fz}' &= (r_y' \, b_{fx}' - r_x' \, b_{fy}') \, dm \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25).$$

Die Komponenten von $\bar{r}$ und $\bar{b}_f$ wurden bereits in (12) und (13) bzw. (13') berechnet. Setzt man dementsprechend in (25) ein und bevorzugt die Darstellung in Polarkoordinaten, dann gelangt man zu folgenden Formeln:

$$\frac{d\,D_{fx}'}{dm} = (R\cos\vartheta - s\cos\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta)$$
$$\left[-\Psi\sin\tau + \Phi\cos\tau \mp u^2 (R\sin\vartheta - s\cos\alpha\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta) + s\sin\alpha\,\frac{du}{dt}\right]$$

$$\frac{d\,D_{fy}'}{dm} = (-R\cos\vartheta + s\cos\alpha\cos\vartheta - \beta\sin\vartheta)$$
$$\left[(\Psi\cos\tau + \Phi\sin\tau) + \frac{du}{dt}(R\sin\vartheta - s\cos\alpha\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta) - s\sin\alpha\,u^2\right]$$

$$\frac{d D_{f_z}'}{dt} = -(R \sin\vartheta - s\cos\alpha\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta)$$

$$\left[(\Psi\cos\tau + \Phi\sin\tau) + \frac{du}{dt}(R\sin\vartheta - s\cos\alpha\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta) - s\sin\alpha\, u^2\right]$$

$$- s\sin\alpha \left[-\Psi\sin\tau + \Phi\cos\tau + \frac{du}{dt} s\sin\alpha + u^2(R\sin\vartheta - s\cos\alpha\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta)\right].$$

Entwickelt man dies und multipliziert mit $dm = \mu s\, ds\, d\alpha\, d\beta$ aus, so treten bei der Integration neben den Integralen (14) bis (17) noch die folgenden auf:

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-b}^{b} \mu s^3\, ds \begin{Bmatrix}\cos^2\alpha\\ \sin^2\alpha\end{Bmatrix} d\alpha\, d\beta = \frac{1}{2}\int_0^R\int_0^b s^2(2\pi s\, ds\, d\beta)\mu = \frac{J_p}{2} \quad \text{. . . . . (26)}$$

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-b}^{b} \mu s^2\, ds \begin{Bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{Bmatrix} d\alpha\beta\, d\beta = 0 \quad \text{. . . . . (27)}$$

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-b}^{b} \mu s^3\, ds \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha\, d\beta = 0 \quad \text{. . . . . (28)}$$

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-b}^{b} \mu s\, ds\, d\alpha\, \beta^2\, d\beta = J_z'' - \frac{J_p}{2} \quad \text{. . . . . (29).}$$

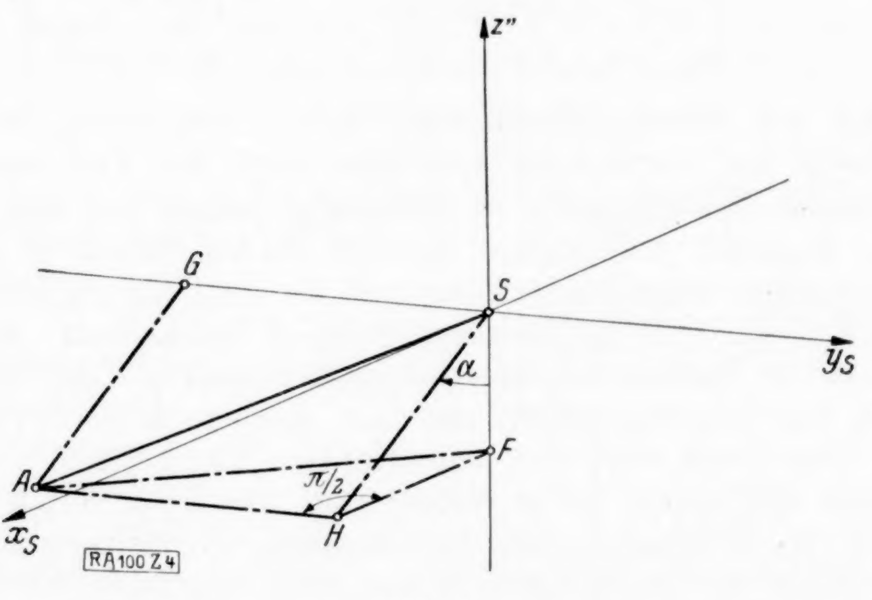


Abb. 4.

Dieses letzte Integral bedarf einer näheren Erläuterung. Bildet man (Abb. 4)

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-b}^{b} \beta'^2(\mu s\, ds\, d\alpha\, d\beta) = J_z'' = \iiint \mu s\, ds\, d\alpha\,(\beta^2 + s^2\sin^2\alpha)\, d\beta = \iiint \mu s\, ds\, d\alpha\, \beta^2\, d\beta$$

$$+ \iiint \mu s^3\, ds \sin^2\alpha\, d\alpha\, d\beta,$$

worin mit $\beta' = AF$ der Abstand eines Punktes A von der Achse z'' bezeichnet ist und die anderen Bezeichnungen mit denen der Abb. 3 übereinstimmen, dann erkennt man, daß nach (26) das zweite Integral ganz rechts den Wert $\frac{J_p}{2}$ hat. Daraus folgt dann unmittelbar die Richtigkeit von (29).

Unter Berücksichtigung dieser Integralformeln erhält man schließlich die Ausdrücke für die Zusatzmomente der Führungsbeschleunigung.

$$\left.\begin{aligned} D_{f_x}' &= R M\cos\vartheta(\Phi\cos\tau - \Psi\sin\tau) + u^2\sin\vartheta\cos\vartheta(J_y'' - J_z'')\\ D_{f_y}' &= -R M\cos\vartheta(\Psi\cos\tau + \Phi\sin\tau) - \frac{du}{dt}\sin\vartheta\cos\vartheta(J_y'' - J_z'')\\ D_{f_z}' &= -R M\sin\vartheta(\Psi\cos\tau + \Phi\sin\tau) - \frac{du}{dt}(J_y''\sin^2\vartheta + J_z''\cos^2\vartheta)\end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . (30')}$$

oder in rechtwinkeligen Koordinaten, nach Ersetzung von Ψ durch $\frac{d^2X}{dt^2}$ und von Φ durch $\frac{d^2Y}{dt^2}$, $u=\frac{dT}{dt}$

$$\left.\begin{aligned} D_{fx}' &= R\,M\cos\vartheta\left(\frac{d^2Y}{dt^2}\cos T-\frac{d^2X}{dt^2}\sin T\right)+\left(\frac{dT}{dt}\right)^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,(J_y''-J_z'')\\ D_{fy}' &= -R\,M\cos\vartheta\left(\frac{d^2X}{dt^2}\cos T+\frac{d^2Y}{dt^2}\sin T\right)-\frac{d^2T}{dt^2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,(J_y''-J_z'')\\ D_{fz}' &= -R\,M\sin\vartheta\left(\frac{d^2X}{dt^2}\cos T+\frac{d^2Y}{dt^2}\sin T\right)-\frac{d^2T}{dt^2}(J_y''\sin^2\vartheta+J_z''\cos^2\vartheta) \end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (30).$$

b) Herrührend von der Coriolisbeschleunigung. Analog wie unter a) ist

$$d\,\overline{D}_c=-[\bar r\cdot\bar b_c\,dm]$$

oder

$$\left.\begin{aligned} d\,D_{cx} &= (r_z'\,b_{cy}'-r_y'\,b_{cz}')\,dm\\ d\,D_{cy}' &= (r_x'\,b_{cz}'-r_z'\,b_{cx}')\,dm\\ d\,D_{cz}' &= (r_y'\,b_{cx}'-r_x'\,b_{cy}')\,dm \end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31).$$

Wieder ist (12) und (22) einzusetzen und nach Multiplikation mit $dm=\mu\,s\,ds\,d\alpha\,d\beta$ über das ganze Rad zu integrieren. Es treten die schon bekannten Integrale (14) (15) (16) (17) (26) (27) (28) (29) auf und man erhält nach einiger Rechnung

$$\left.\begin{aligned} M_{cx}' &= u\,\omega_y''\,J_p\cos\vartheta\\ M_{cy}' &= -2\,u\,\omega_x'\,(J_y''-J_z'')\cos^2\vartheta\\ M_{cz}' &= -2\,u\,\omega_x'\,(J_y''-J_z'')\sin\vartheta\cos\vartheta \end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (32).$$

4. Berücksichtigung von Bodenunebenheiten. Erteilt man dem System I, mit welchem die Unterstützungsebene E fest verbunden ist, eine nach der Zeit nach irgendeinem Gesetz $Z(t)$ veränderliche Translationsbewegung in Richtung seiner z-Achse, dann beschreibt der Bodenberührungspunkt P nicht mehr eine ebene Bahn, sondern im festen Raum eine Raumkurve, deren parametrische Darstellung mit der Zeit als Parameter gegeben ist, wenn man $Z(t)$ im Verein mit $X(t)$, $Y(t)$ als Bahnkurve in E betrachtet. Setzt man voraus, daß die Krümmungsradien dieser Raumkurve überall größer sind als der Radkreisradius und daß die Funktion $Z(t)$ so angenommen wird, daß sie einer möglichen Bewegung des Rades entspricht, dann kann man die beschriebene Raumkurve als Bahn des Rades auf einer unebenen Unterlage auffassen. Wir wollen nun die Koordinate Z als Funktion von t allein annehmen, es hängt somit die räumliche Gestaltung der Fläche, auf der das Rad rollend gedacht werden kann, wesentlich von dem sonstigen Verlauf der Radbewegung ab. In vielen Fällen, insbesondere dann, wenn die Bahn und die Geschwindigkeit des Rades bis auf kleine Abweichungen bekannt sind, lassen sich aus der getroffenen Annahme indes wertvolle Schlüsse ziehen, so daß diese im Interesse der einfachen Darstellung ihre Berechtigung hat.

Der Einfluß der zusätzlichen Bewegung auf die Radgleichungen äußert sich darin, daß zu den Führungsbeschleunigungen gegen den absoluten Raum, wie sie durch (13) ausgedrückt sind, noch die Führungsbeschleunigung

$$b_{zf}=\frac{d^2Z}{dt^2}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

und deren Momente hinzutreten. Coriolisbeschleunigungen treten keine auf, da ja der Geschwindigkeitsvektor der Zusatzbewegung in die Richtung der relativen Drehung von II gegen den ruhenden Raum fällt, wodurch deren äußeres Vektorprodukt verschwindet.

Die Führungskraft durch die Unebenheitsbewegung beträgt

$$P_{zf}=-\int b_{zf}\,dm=-M\frac{d^2Z}{dt^2}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (34).$$

Die Elementarmomente der entsprechenden Beschleunigung sind nach (25)

$$d\,D_{ufx}'=-r_y'\frac{d^2Z}{dt^2}\,dm$$

$$d\,D_{ufy}'=r_x'\frac{d^2Z}{dt^2}\,dm$$

$$d\,D_{ufz}'=0\,.$$

Setzt man nach (12) ein, multipliziert wie früher mit $d\,m = \mu\,s\,d\,s\,d\,a\,d\,\beta$ und integriert, so kommt man auf den einfachen Ausdruck

$$D_{u\,f\,x}' = R\;M \sin\vartheta\,\frac{d^2 Z}{d\,t^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35).$$

Es ist der Einfluß der Zusatzbeschleunigung durch die Bodenunebenheiten so zu beurteilen, als ob deren gesamte Trägheitskraft $M\,\frac{d^2 Z}{d\,t^2}$ im Radschwerpunkt angreifen würde.

5. Die Widerstände. Bevor zur endgültigen Aufstellung der Radgleichungen geschritten wird, sei noch einiges über die eingeprägten Kräfte und Widerstände gesagt.

Die gesamten äußeren Kräfte, wie sie in (6) und (6′) erscheinen, setzen sich zusammen aus den Kräften bzw. Momenten, welche von außen her aktiv auf das Rad einwirken, den sogenannten äußeren Kräften und aus den Widerständen bzw. deren Momenten, welche die Stütz- oder Führungsgebilde der Bewegung entgegensetzen. Im betrachteten Fall ist das Stützgebiet, auf dem sich das Rad bewegen muß, die Ebene E, und die Stützkraft, welche den untersten Punkt P des Rades entgegen der Wirkung der Schwere auf E festhält, der in die z- bzw. z'-Richtung weisende Normaldruck. Dieser ist eine reine Reaktionskraft und hängt als solche von den eingeprägten Kräften und den aus der Radbewegung sich ergebenden Trägheitskräften ab.

Es treten aber auch in der Ebene E selbst Kräfte auf, welche die Bahn des Rades entscheidend beeinflussen und deshalb als Führungskräfte angesprochen werden können. Diese Kräfte werden durch Reibung hervorgerufen und besitzen deswegen auch deren eigentümlichen Charakter, bald Reaktions-, bald Aktionskräfte zu sein, je nachdem es sich um Ruh- oder Gleitreibung handelt.

Betrachten wir zunächst den Fall des gleitenden Rades. Der Führungswiderstand ist dann eine statisch bestimmte Größe, und zwar ist sein absoluter Wert gleich $W' = f\,W_z' = \sqrt{W_x'^2 + W_y'^2}$, wenn f die Reibungszahl der gleitenden Reibung zwischen Rad und Bodenebene bedeutet. Seine Richtung ist jener der gesamten Gleitgeschwindigkeit $v_{P\,R}$ entgegengesetzt und kann, wie in Abb. 5 angedeutet, leicht gefunden werden. Die Komponenten von W nach den Richtungen x' und y' ließen sich auch durch die Variablen X, Y, T bzw. τ und ω_y'' ausdrücken, doch sei hier die Rechnung nicht durchgeführt, da sich sehr unübersichtliche Ausdrücke ergeben würden.

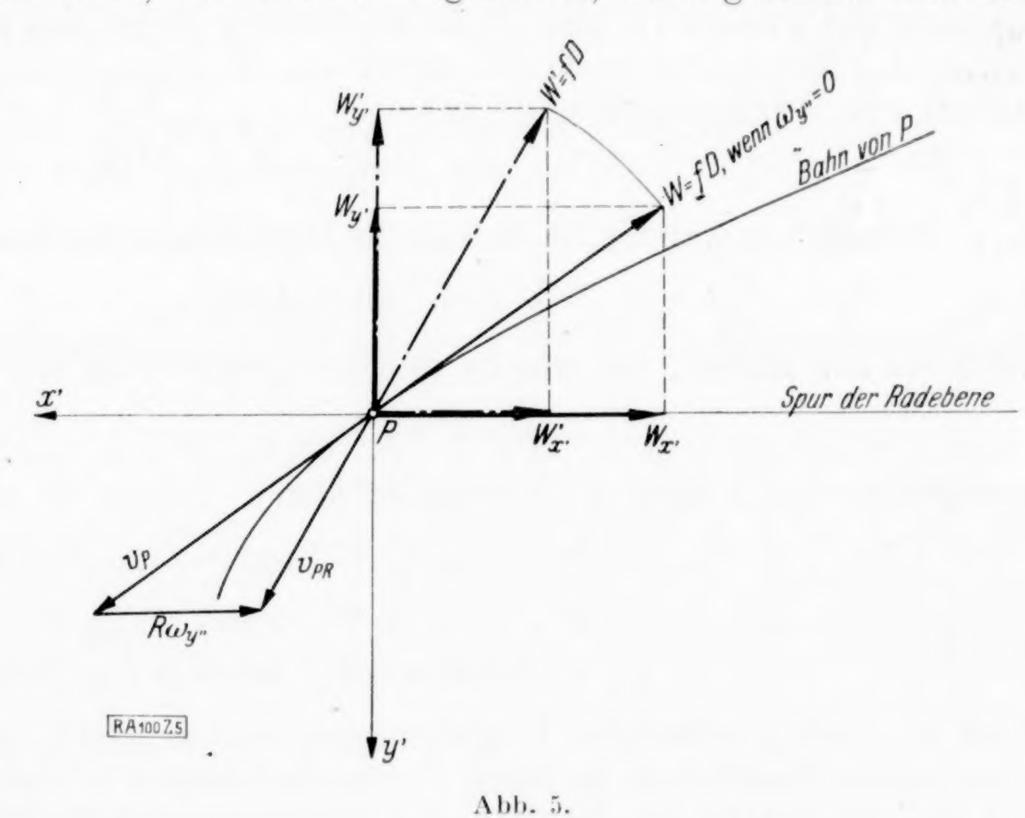


Abb. 5.

Sobald das Rad rollt, tritt an Stelle der statisch bestimmten Gleitreibung die statisch unbestimmte Ruhreibung zwischen Boden und Rad. Man muß dann die Komponenten der Führungswiderstände W_x' und W_y' als Unbekannte einführen, die erst aus den Bewegungsgleichungen zu bestimmen sind. Die Widerstände W_x', W_y' und W_z' sind aber nicht für den ganzen Bereich der Werte, welche sie annehmen können, unabhängig voneinander, sondern es muß vielmehr der Ungleichung

$$W_x'^2 + W_y'^2 \lesseqgtr f_r^2\,W_z'^2 \quad (f_r = \text{Koeff. der Ruhreibung})$$

Genüge geleistet werden, wenn das Rad rollen soll. Ist die obige Bedingung nicht erfüllt, so gleitet das Rad und es treten die oben geschilderten Verhältnisse auf.

Ähnlich liegen die Dinge bei den Reibungsmomenten. W_x', W_y' und W_z' haben um P keine Momente, wohl aber tritt ein solches auf, welches sich der Drehbewegung des Rades direkt widersetzt. Die drei Komponenten dieses Reibungsmomentes um die Achsen x', y', z' bezeichnet man der Reihe nach mit

$D_{r\,x}' =$ Fallreibung
$D_{r\,y}' =$ Rollreibung
$D_{r\,z}' =$ Bohrreibung.

Über die Größe dieser Reibungsmomente sind, soweit es sich um Fall- und Bohrreibung handelt, in der Literatur so gut wie gar keine zuverlässigen Angaben zu finden.

Analog zu den Reibungskräften liegt es nahe, das Reibungsmoment in entgegengesetzter Richtung zum gesamten Winkelgeschwindigkeitsvektor mit einem dem Normaldruck W_z' proportionalen Wert anzusetzen. Diese Annahme widerspricht aber der Erfahrung, denn sie würde bedingen, daß in den Komponenten nach den $x'\,y'\,z'$-Achsen derselbe Proportionalitätsfaktor vorkommt. Daß dies nicht richtig sein kann, erkennt man daraus, daß die Bohrreibung, welche einer Wendebewegung des Rades entgegenwirkt, eigentlich eine Gleitreibung und im Wesen verschieden von der Rollreibung ist.

Wir werden folgende Betrachtungsweise annehmen. Die Fallreibung D_{rx}' ist, solange eine Fallbewegung $\omega_x' = \frac{d\vartheta}{dt}$ nicht tatsächlich eintritt, ein unbestimmtes Reaktionsmoment. Hat D_{rx}' einen gewissen Grenzwert, der vom Normaldruck D_z' abhängig sein wird, überschritten, dann setzt die Fallbewegung ω_x' ein und das Fallreibungsmoment nimmt den Charakter eines eingeprägten Momentes an. Es werde nun der Ansatz gemacht

$$D_{rx}' = \mp w_f \, W_z' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36a),$$

wobei w_f eine konstante Größe sein soll. Das Doppelvorzeichen rührt daher, daß D_{rx}' mit Vorzeichenwechsel von ω_x' ebenfalls seine Richtung ändert.

In gleicher Weise ist D_{ry}' eine Reaktion, solange kein Rollen eingetreten ist ($\omega_y' = 0$, also auch $\omega_y'' = 0$), setzt das Rollen ein, dann sei wieder

$$D_{ry}' = \mp w_r \, W_z' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36b),$$

worin w_r die Rollwiderstandszahl bedeutet und als eine Konstante betrachtet werden kann, sofern die Neigung des Rades sich innerhalb des betrachteten Abschnittes der Bewegung nicht zu stark ändert; denn es ist wahrscheinlich, daß die Rollreibung mit wachsender Radneigung in einer von der Radgestalt abhängigen Weise variiert.

Für die Bohrreibung kommt nun nicht bloß die Drehung gegen das System II, sondern die gesamte absolute Drehung gegen das System I in Betracht. In (11) wurde mit u die Relativdrehgeschwindigkeit von II gegen I bezeichnet, daher ist die maßgebende absolute Drehgeschwindigkeit

$$\omega_z = u + \omega_z' = u + \omega_y'' \sin\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37).$$

Solange ω_z Null ist, wird man die Bohrreibung als Reaktionsmoment ansetzen, sobald aber

$$u + \omega_y'' \sin\vartheta \neq 0,$$

wird sie zur Aktion, für welche in Übereinstimmung mit den vorhergehenden Ansätzen

$$D_{rz}' = \mp w_b \, W_z' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36c)$$

geschrieben sei. Zusammengefaßt ist also

$$\left.\begin{aligned} D_{rx}' &= \mp w_f \, W_z' \text{ wenn } \omega_x' = 0 \\ D_{ry}' &= \mp w_r \, W_z' \text{ wenn } \omega_y'' = 0 \\ D_{rz}' &= \mp w_b \, W_z' \text{ wenn } u + \omega_y'' \sin\vartheta \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (36).$$

Sind die rechts stehenden Ungleichungen nicht erfüllt, so treten die Reibungsmomente als unbekannte Reaktionen an Stelle der nullwerdenden entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten; bei D_{rz}' kommt zu den bestehenden Gleichungen noch (37) hinzu.

6. Die Grundgleichungen. Wir sind nun so weit, aus den Formeln (6), (6'), (17), (17'), (30), (30'), (34), (35) und (36) die allgemeinen Grundgleichungen aufstellen zu können. Dabei ist noch zu beachten, daß die Kräfte $\Sigma \underline{P}$ der Gl. (6) im Schwerpunkt angreifend gedacht sind und daher auch Momente um das Momentenzentrum P, den Bodenberührungspunkt, ergeben. Im folgenden soll zur Kennzeichnung der äußeren Kräfte der Unterstrich weggelassen werden.

Die Bezeichnungen fassen wir der Übersicht halber noch einmal zusammen. Es bedeuten

$X, Y, \vartheta, T, \tau, \varrho, \varphi$ = Lagekoordinaten des Rades wie in Abschnitt I definiert.

Z = Eine Koordinate, welche ein Maß für die Bodenunebenheiten gibt (siehe II, 4).

ω_y'' = Die Winkelgeschwindigkeit des Rades um die y''-Achse

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \varrho \frac{d^2 \varphi}{d t^2} + 2 \frac{d \varphi}{d t} \frac{d \varphi}{d t} \\ \Psi &= \frac{d^2 \varrho}{d t^2} - \varrho \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8b).$$

Abkürzungen nach II, 2a.

$$u = \frac{d \varphi}{d t} + \frac{d \tau}{d t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

$\Sigma P_x', \Sigma P_y', \Sigma P_z'$ = Komponenten der im Schwerpunkt S angreifenden äußeren Kräfte.

$\Sigma D_x', \Sigma D_y', \Sigma D_z'$ = Komponenten der auf den Bodenberührungspunkt P reduzierten äußeren Momente.

J = Trägheitsmomente.

$w_x', w_y', w_z', D_{rX}', D_{rY}', D_{rZ}'$ = Widerstände, definiert in II, 5.

R = Radhalbmesser.

M = Radmaße.

Die Grundgleichungen lauten für rechtwinklige Koordinaten der Radbahn wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} & M\left(\frac{d^2 X}{d t^2} \cos T + \frac{d^2 Y}{d t^2} \sin T\right) + M R \sin \vartheta \frac{d^2 T}{d t^2} + 2 M R \cos \vartheta \frac{d T}{d t} \frac{d \vartheta}{d t} = \Sigma P_x' + W_x' \\ & M\left(\frac{d^2 Y}{d t^2} \cos T - \frac{d^2 X}{d t^2} \sin T\right) + M R \sin \vartheta \left(\frac{d T}{d t}\right)^2 - M R \frac{d^2 (\sin \vartheta)}{d t^2} = \Sigma P_y' + W_y' \\ & M R \frac{d^2 (\cos \vartheta)}{d t^2} = \Sigma P_z' + W_z' - M \frac{d^2 Z}{d t^2} \end{aligned}\right\} (38\text{ a, b, c}).$$

$$J_x'' \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} - M R \cos \vartheta \left(\frac{d^2 Y}{d t^2} \cos T - \frac{d^2 X}{d t^2} \sin T\right) - (J_y'' - J_z'') \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d T}{d t}\right)^2$$
$$- J_p \omega_y'' \cos \vartheta \frac{d T}{d t} = \Sigma D_x' + D_{rx}' - R (\Sigma P_z' \sin \vartheta + \Sigma P_y' \cos \vartheta) + R M \sin \vartheta \frac{d^2 Z}{d t^2}.$$

$$J_p \cos \vartheta \frac{d \omega_y''}{d t} - J_p \omega_y'' \sin \vartheta \frac{d \vartheta}{d t} + M R \cos \vartheta \left(\frac{d^2 X}{d t^2} \cos T + \frac{d^2 Y}{d t^2} \sin T\right) + (J_y'' - J_z'') \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d^2 T}{d t^2}\right)$$
$$+ 2 (J_y'' - J_z'') \cos^2 \vartheta \frac{d T}{d t} \frac{d \vartheta}{d t} = \Sigma D_y' + D_{ry}' + R \cos \vartheta \, \Sigma P_x'.$$

$$\left.\begin{aligned} & J_p \sin \vartheta \frac{d \omega_y''}{d t} + J_p \cos \vartheta \, \omega_y'' \frac{d \vartheta}{d t} + M R \sin \vartheta \left(\frac{d^2 X}{d t^2} \cos T + \frac{d^2 Y}{d t^2} \sin T\right) \\ & \quad - (J_y'' \sin^2 \vartheta + J_z'' \cos^2 \vartheta) \frac{d^2 T}{d t^2} + 2 (J_y'' - J_z'') \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{d \vartheta}{d t} \frac{d T}{d t} \\ & \quad = \Sigma D_z' + D_{rz}' + R \sin \vartheta \, \Sigma P_x' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (38\text{ d, e, f})$$

und bei Polarkoordinaten-Darstellung

$$M (\Psi \cos \tau + \Phi \sin \tau) + M R \sin \vartheta \frac{d u}{d t} + 2 M R \cos \vartheta \, u \frac{d \vartheta}{d t} = \Sigma P_x' + W_z' \quad . \; . \; . \quad (38'\text{a}).$$

$$M (\Phi \cos \tau - \Psi \sin \tau) + M R \sin \vartheta \, u^2 - M R \frac{d^2 (\sin \vartheta)}{d t^2} = \Sigma P_y' + W_y' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (38'\text{b}).$$

$$M R \frac{d^2 (\cos \vartheta)}{d t^2} = \Sigma P_z' + W_z' - M \frac{d^2 Z}{d t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38'\text{c}).$$

$$\left.\begin{aligned} & J_x'' \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} - M R \cos \vartheta (\Phi \cos \tau - \Psi \sin \tau) - (J_y'' - J_z'') \sin \vartheta \cos \vartheta \, u^2 - J_p \cos \vartheta \, u \, \omega_y'' \\ & \quad = \Sigma D_x' + D_{rx}' - R (\Sigma P_z' \sin \vartheta + \Sigma P_y' \cos \vartheta) + R M \sin \vartheta \frac{d^2 Z}{d t^2} \end{aligned}\right\} \quad (38'\text{d}).$$

$$\left.\begin{aligned} J_p \cos\vartheta \frac{d\,\omega_y''}{d\,t} - J_p\,\omega_y'' \sin\vartheta \frac{d\,\vartheta}{d\,t} + M R \cos\vartheta\,(\Psi \cos\tau + \Phi \sin\tau) + (J_y'' - J_z'') \sin\vartheta \cos\vartheta \frac{d\,u}{d\,t} \\ + 2\,(J_y'' - J_z'') \cos^2\vartheta\, u \frac{d\,\vartheta}{d\,t} = \Sigma D_y' + D_{ry} + R \cos\vartheta\, \Sigma P_x' \end{aligned}\right\} \quad (38'\text{e}).$$

$$\left.\begin{aligned} J_p \sin\vartheta \frac{d\,\omega_y''}{d\,t} + J_p\,\omega_y'' \cos\vartheta \frac{d\,\vartheta}{d\,t} + M R \sin\vartheta\,(\Psi \cos\tau + \Phi \sin\tau) + (J_y'' \sin^2\vartheta + J_z'' \cos^2\vartheta) \frac{d\,u}{d\,t} \\ + (J_y'' - J_z'') \sin\vartheta \cos\vartheta\, u \frac{d\,\vartheta}{d\,t} = \Sigma D_z' + D_{rz}' + R \sin\vartheta\, \Sigma P_x' \end{aligned}\right\} \quad (38'\text{f}).$$

Die Zahl der Gleichungen genügt zur Bestimmung der jeweils auftretenden Unbekannten. Das gleitende Rad hat nämlich, wie schon anfangs erwähnt, 5 Freiheitsgrade und entsprechend 5 unabhängige Variable X, Y, T, ω_y'', ϑ oder ϱ, φ, τ, ω_y'', ϑ. Finden alle Drehungen und die Gleitbewegung wirklich statt, so ist von den Widerständen bloß der Normaldruck W_z' eine unbekannte Reaktion. (Siehe II, 5.) Es sind demnach 6 Unbekannte zu bestimmen, zu welchem Zweck die 6 Gleichungen (38) bzw. (38') zur Verfügung stehen. Unterbleibt beispielsweise die Drehung $\frac{d\vartheta}{dt}$, dann muß man die Beziehung $\frac{d\vartheta}{d\,t} = 0$ als neue Gleichung auffassen und an Stelle von $\frac{d\,\vartheta}{d\,t}$ bzw. ϑ das Reibungsmoment D_{rx}' als unbekannte Reaktion suchen. Ebenso rückt D_{ry}' an Stelle von ω_y'' als Unbekannte, wenn $\omega_y'' = 0$ gesetzt werden kann; wird endlich die Gleichung

$$\omega_z = u + \omega_y'' \sin\vartheta = 0 \text{ (siehe 37)}$$

als erfüllt vorausgesetzt, welche besagt, daß eine starke Bohrreibung eine Drehung um die z-Achse ausschließt, dann muß D_{rz}' als unbekannte Reaktion eintreten; immer aber ist die nötige Zahl von Gleichungen vorhanden.

Soll das Rad *nur rollen* und nicht gleiten, dann müssen zu den 6 Grundgleichungen noch die *Rollbedingungen*

$$\omega_y^{2''} R^2 = \left(\frac{d\,X}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,Y}{d\,t}\right)^2 = \left(\frac{d\,\varrho}{d\,t}\right)^2 + \varrho^2 \left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 \quad \text{(39a)}$$

und

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\varrho \frac{d\,\varphi}{d\,t}}{\frac{d\,\varrho}{d\,t}} = \frac{\frac{d\,Y}{d\,t}}{\frac{d\,X}{d\,t}} \quad \text{(39b)}$$

hinzugenommen werden, welche leicht aus Bild 2 direkt abgelesen werden können. Ferner muß noch die bereits in II, 5 erwähnte Ungleichung

$$W_x'^2 + W_y'^2 \lesseqgtr f^2\, W_z'^2 \quad (40)$$

erfüllt sein.

Entsprechend diesen insgesamt 8 Gleichungen (38), (39) und (40) sind nun zu bestimmen die 5 Variablen X, Y, T, ω_y'', ϑ und die 3 Reaktionen W_x', W_y', W_z'.

Ein flüchtiger Blick auf die Grundgleichungen lehrt, daß ähnlich wie bei den Bewegungsgleichungen des allgemeinen Kreisels Glieder mit Produkten zweier Variabler oder deren Differentialquotienten vorhanden sind und daß infolgedessen die allgemeine Integration dieser Systeme von nicht linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung auf ähnliche Schwierigkeiten stoßen wird. Auf einen Versuch zu einer solchen Integration soll in dieser Arbeit nicht eingegangen werden, sondern bloß eine *allgemeine Charakteristik der freien Radbewegung* hergeleitet werden.

Es sei vorausgesetzt, daß *alle äußeren Kräfte mit Ausnahme der Schwerkraft und sämtliche Reibungen fehlen*, und daß ferner das Rad auf einer *vollkommenen Ebene rolle*, daher auch die bezüglichen Störungsglieder unberücksichtigt bleiben können. Durch Multiplikation von (38'e) mit $\sin\vartheta$ und von (38'f) mit $\cos\vartheta$ und Subtraktion der beiden erhält man

$$J_p\,\omega_y'' \frac{d\,\vartheta}{d\,t} = - J_z'' \cos\vartheta \frac{d\,u}{d\,t} \quad (41).$$

Ähnlich ergibt sich nach Multiplikation von (38'e) mit $\cos\vartheta$ und von (38'f) mit $\sin\vartheta$ und Addition die Beziehung

$$J_p \frac{d\,\omega_y''}{d\,t} = M R\,(\Psi \cos\tau + \Phi \sin\tau) - J_y'' \sin\vartheta \frac{d\,u}{d\,t} - 2\,(J_y'' - J_z'') \cos\vartheta\, u \frac{d\,\vartheta}{d\,t}.$$

Beschränkt man sich auf die Betrachtung des nur rollenden Rades, dann stellt das erste Klammerglied rechts nichts anderes vor als die Beschleunigung des Bodenberührungspunktes P in Richtung der Bahntangente x', wie sich aus der Definition der Größen Ψ, Φ und τ ergibt. Es ist demnach

$$\Psi \cos \tau + \Phi \sin \tau = R \frac{d\,\omega_y''}{d\,t}$$

und

$$(J_p - R^2 M) \frac{d\,\omega''}{d\,t} = J_y'' \frac{d\,\omega_y''}{d\,t} = -\frac{d\,u}{d\,t} J_y'' \sin \vartheta - 2 (J_y'' - J_z'') \cos \vartheta \frac{d\,\vartheta}{d\,t} \quad . \quad . \quad (42).$$

Wir gehen nun von der Annahme aus, daß zu Beginn der Betrachtung das Rad aufrecht und geradeaus rolle; mathematisch ausgedrückt, daß zur Zeit $t = 0$, $\vartheta = 0$, $u = 0$ erfüllt sei. Läßt man nun einen Stoß $+ P_y'$ auf das Rad einwirken, so wird nach (36'd) eine kleine Neigung des Rades nach der Seite der negativen ϑ hin die Folge sein. Sobald aber eine Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\,\vartheta}{d\,t}$ aufgetreten ist, muß sich nach (41) auch eine Wendebeschleunigung $\frac{d\,u}{d\,t}$ einstellen, und zwar so, daß bei negativem $\frac{d\,\vartheta}{d\,t}$ die Wendung $\frac{d\,u}{d\,t}$ positiv erfolgt. Vergegenwärtigt man sich nun die Zählweise der Koordinaten (Abschnitt I und Abb. 2), so kann man den Satz aufstellen: Das Rad wendet sich nach der Seite, nach der hin es fallen will.

Die rechte Seite von (42) hat einen positiven Wert, denn $\frac{d\,u}{d\,t}$ ist positiv, infolgedessen auch u, wenn zu Anfang $u = 0$ war und die Störung wie vorbeschrieben erfolgt ist. $\frac{d\,\vartheta}{d\,t}$ und $\sin \vartheta$ sind negativ, $(J_y'' - J_z'')$ immer positiv. Es muß also $\frac{d\,\omega_y''}{d\,t}$ positiv sein. Ist die Störung nach der anderen Seite hin erfolgt, dann kehren sich die Vorzeichen von u und ϑ um, und es bleibt wieder $\frac{d\,\omega_y''}{d\,t}$ größer als Null. Der Folgesatz lautet daher: Beim Fallen erhöht sich die Drehgeschwindigkeit des Rades.

Ein weiterer Beitrag zur Kenntnis der Bewegung läßt sich aus (38'd) ableiten. $(\Phi \cos \tau - \Psi \sin \tau)$ ist die Beschleunigung des Bodenberührungspunktes senkrecht zur Bahntangente, also gleich der Zentripetalbeschleunigung $\frac{R^2}{\varrho_0} \omega_y''^2$. Berücksichtigt man dies, dann geht die genannte Gleichung mit $P_y' = 0$ $P_z' = - M_g$ über in

$$J_x \frac{d^2 \vartheta}{d\,t^2} = R\,M\,g \sin \vartheta + R^2 M \frac{R}{\varrho_0} \omega_y''{}_0^2 \cos \vartheta + [u^2 \sin \vartheta \cos \vartheta (J_y'' - J_z'') + u\,\omega_y'' \cos \vartheta\, J_p].$$

Nach dem oben Gesagten findet die eingeleitete Fallbewegung nach der Seite der negativen ϑ hin statt, es hat daher das erste Glied rechts, welches die Wirkung der Schwerkraft angibt, negatives Vorzeichen, d. h. die Schwerkraft unterstützt die Fallbewegung. Das zweite Glied rechts hingegen, das von der Fliehkraft herrührt, ist positiv und sucht das Rad daher wieder aufzurichten. Der in Klammer stehende Teil endlich ist bei kleinem Neigungswinkel und großer Radgeschwindigkeit positiv, stellt also ein aufrichtendes Moment dar. Man findet in der Kreiseltheorie Ausdrücke von ganz ähnlichem Bau wieder (siehe z. B. Grammel, Der Kreisel, S. 88 u. f.), welche als sogenannte Präzessionsmomente die Fallbewegung rasch rotierender Kreisel verhindern. Deutet man u als Präzessionsgeschwindigkeit eines Kreisels, $\omega_y'' \cos \vartheta = \omega_y'$ als dessen Rotationsgeschwindigkeit um die Figurenachse mit dem Trägheitsmoment J_p, so gibt der Ausdruck $u\,\omega_y'' \cos \vartheta\, J_p$ das Moment, welches bei regulärer Präzession mit einer Öffnung des Präzessionskegels von 180° der Schwerkraft entgegenwirkt. Die Analogien lassen sich noch weiter verfolgen, doch soll hier darauf nicht weiter eingegangen werden. Es sei nur noch darauf hingewiesen, daß die stabilen Bewegungsarten der regulären bzw. pseudoregulären Präzession auch bei der Radbewegung ihre vollkommenen Analogien haben. Der letzte Abschnitt dieser Arbeit gibt den Schlüssel für Untersuchungen darüber, indem dort die Gleichungen unter Annahme von nur kleinen Abweichungen von kreisförmiger Bahn auf eine mathematisch einfacher zu behandelnde Form gebracht werden. Vorerst soll aber noch an Hand von einigen leicht zu bestätigenden Sonderfällen die Richtigkeit der durch immerhin langwierige Rechnungen gewonnenen Grundgleichungen wahrscheinlich gemacht werden.

7. Einige Sonderfälle. a) Es werde der Spezialfall einer zylindrischen Walze betrachtet, welche unter dem Einfluß einer in der x'-Richtung wirkenden Kraft P und des Eigengewichtes steht. Durch die Formgebung wird der Neigungswinkel ϑ gleich Null erzwungen. Wir können die von vorneherein festliegenden Größen schon zusammenstellen

$$\begin{array}{lll} \Sigma P_x' = P & \Sigma D_x' = 0 & \\ \Sigma P_y' = 0 & \Sigma D_y' = 0 & \vartheta = 0 \,. \\ \Sigma P_z' = -M g & \Sigma D_z' = 0 & \end{array}$$

Nimmt man an, daß zur Zeit null der Bodenberührungspunkt mit dem Ursprung des Systems I zusammenfällt, ebenso daß sich dort die x- und x'-Achse decken, so ist dort auch $\varrho_0 = 0$ und $\tau_0 = 0$.

Für den Bewegungsbeginn lautet die Gleichung (38'b) hiermit

$$\Phi_0 = \varrho_0 \left(\frac{d^2 \varphi}{d t^2}\right)_0 + 2 \left(\frac{d \varrho}{d t}\right)_0 \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)_0 = \Sigma P_y' + W_y' = 0 \,,$$

da im Anfangszustand $\Sigma P_y'$ und auch W_y' null sind. Aus dieser Gleichung folgt aber $\left(\frac{d \varphi}{d t}\right)_0 = 0$ und da zu Anfang $\varphi_0 = 0$, bleibt φ auch weiterhin gleich null. Man hat auch

$$u_0 = \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)_0 + \left(\frac{d \tau}{d t}\right)_0 = 0 \,,$$

und also wegen $\left(\frac{d \varphi}{d t}\right)_0 = 0$ auch $\left(\frac{d \tau}{d t}\right)_0 = 0$, es bleibt infolgedessen jederzeit $\tau = 0$ und $u = 0$.

Die Rollgleichung (39a) geht über in

$$\omega_y'' R = \frac{d \varrho}{d t} \,,$$

woraus folgt

$$\varphi = R \frac{d \omega_y''}{d t} \,.$$

Jetzt lauten die Bewegungsgleichungen

$$M R \frac{d \omega_y''}{d t} = P + W_x'$$

$$M g = W_z'$$

$$(M R^2 + J_p) \frac{d \omega_y''}{d t} = P R - D_{ry}' \,.$$

Die letzte Gleichung bestimmt den Bewegungsverlauf und sieht übersichtlicher geschrieben folgendermaßen aus:

$$J_y'' \frac{d \omega_y''}{d t} = P R - w_r M g$$

$$\omega_y'' = \frac{P R - w_R M g}{J_y''} t \,,$$

wie man auch direkt leicht finden kann.

b) Das Rad sei sehr schmal, ruhe auf scharfem Umfang und stehe unter dem Einfluß der folgenden Kräfte

$$\begin{array}{ll} \Sigma P_x' = 0 & \Sigma D_x' = 0 \\ \Sigma P_y' = 0 & \Sigma D_y' = 0 \\ \Sigma P_z' = -M g & \Sigma D_z' = 0 \,. \end{array}$$

Wieder sei zu Anfang $\varrho_0 = 0$, $\tau_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, x' in X_a. (38'a) geht dann über in $\Psi_0 = 0$ und infolgedessen auch $\left(\frac{d^2 \varrho}{d t^2}\right)_0 = 0$. Weil zur Zeit $t = 0$, $\varrho_0 = 0$, so ist dann auch jederzeit $\varrho = 0$. Ferner gibt (38'e) für $t = 0$

$$J_p \left(\frac{d \omega_y''}{d t}\right)_0 = 0 \,.$$

Daraus folgt $\omega_y'' = 0$, weil zu Anfang $(\omega_y'') = 0$ war. Die Gleichung (38'f) geht für $t = 0$ über in

$$J_z'' \frac{d\,u}{d\,t} = 0\,,$$

was besagt, daß $u = 0$ für alle Zeit, weil es dies schon bei Zeit null war. Nachdem $\varrho = 0$, so ist wegen (8b) $\Phi = 0$. Die Grundgleichungen sehen nun folgendermaßen aus:

$$-R\,M \frac{d^2 (\sin \vartheta)}{d\,t^2} = P + W_y'$$

$$R\,M \frac{d^2 (\cos \vartheta)}{d\,t^2} = -M\,g + W_z'$$

$$J_x'' \frac{d^2 \vartheta}{d\,t^2} = -R\,P \cos \vartheta + R\,M\,g \sin \vartheta + D_{rx}'.$$

Die letzte ist Bewegungsgleichung für das Fallen nach der Seite negativer ϑ hin, wie sie sich ebenfalls sofort anschreiben läßt. Auf ihre weitere Auswertung kann verzichtet werden, da sie nichts anderes ist, als die bekannte Pendelgleichung. Aus den beiden ersten Gleichungen kann, was hier nur als Beispiel für den Wert der Form, in welcher die Grundgleichungen hier geboten wurden, die Bedingung abgeleitet werden, welche erfüllt sein muß, damit das fallende Rad nicht seitwärts ausgleitet. Gleiten tritt in dem Moment ein, als

$$W_y' > f_r\,W_z'$$

oder

$$P + M\,R \frac{d^2 (\sin \vartheta)}{d\,t^2} > f_r \left[M\,g + M\,R \frac{d^2 (\cos \vartheta)}{d\,t^2} \right].$$

c) Dasselbe Rad wie unter b) werde unter den gleichen Anfangsbedingungen von folgendem Kräftesystem ergriffen

$$\Sigma P_x' = 0 \qquad \Sigma D_x' = 0$$

$$\Sigma P_y' = 0 \qquad \Sigma D_y' = 0$$

$$\Sigma P_z' = -M\,g \qquad \Sigma D_z' = D.$$

Dann kann man wie zuvor schließen, daß jederzeit $\psi = 0$, $\varrho = 0$, $\varphi = 0$. Ferner folgt aus (38'b)

$$\frac{d^2 (\sin \vartheta)}{d\,t^2} = 0$$

daher auch, weil $\vartheta_0 = 0$ immer $\vartheta = 0$ (38'f), führt zur Bewegungsgleichung

$$J_z'' \frac{d\,u}{d\,t} = D\,.$$

Die Bewegung ist ein einfaches Kreisen um die z'-Achse.

III. Die Grundgleichungen unter Annahme kleiner Abweichungen von kreisförmiger Bahn.

Wie bereits erwähnt, wird es in vielen Fällen, besonders bei Stabilitäts- und Schwingungsuntersuchungen, genügen, die vereinfachende Annahme zu treffen, das Rad rolle unter Ausschluß von Gleiten in einer kreisförmigen Bahn und besitze dabei einen vorderhand beliebigen Neigungswinkel und eine gewisse Umdrehungs- und Bahngeschwindigkeit. Dieser Hauptbewegung können sich kleine Störungsbewegungen in allen Koordinaten überlagern. Diese Störungen sollen jedoch voraussetzungsgemäß so klein sein, daß ihre Produkte sowie die ihrer sämtlichen Differentiale sowohl mit sich selbst als wechselweise untereinander als kleine Größen von höherer als der ersten Ordnung vernachlässigbar sind. Dasselbe soll von der Störbewegung gelten, welche durch die Unebenheiten der Unterlage verursacht werden kann. Im besondern werden wir, vorbehaltlich späterer Nachweise bzw. Korrekturen, annehmen, daß die kleinen Störungen durch periodische Funktionen ausdrückbar sind.

Es ist nun die Aufgabe gestellt, die Grundgleichungen auf Grund dieser Annahmen umzuformen. Den Nullpunkt des Systems I verlegen wir zu diesem Zweck in den Mittelpunkt des vom Rad beschriebenen Grundkreises mit dem Radius ϱ_0, auf dem das Rad mit der durchschnittlichen oder Grundwinkelgeschwindigkeit $\omega_y''{}_0$ rollen soll. Der Radiusvektor ϱ_0 wird dann mit der konstanten Grundwinkelgeschwindigkeit, die wir mit k bezeichnen wollen,

auf der Ebene E wandern, wobei die positive Zuordnung zur Rollgeschwindigkeit im Sinne von I vorzunehmen ist. Die x'-Achse steht als Kreistangente senkrecht zu ϱ, im Mittel ist also $\tau = \frac{\pi}{2}$. Endlich habe das Rad beim Durchlaufen des Rollkreises eine Grundneigung ϑ_0, deren Vorzeichen ebenfalls im Sinne von Abb. 2 zu bewerten ist.

Die wirklichen Koordinaten sind dann

$$\left.\begin{array}{ll} \varrho = \varrho_0 + \varrho & \cos\tau = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = -\tau \\ \omega_y'' = \omega_y''{}_0 + \omega_y'' & \sin\tau = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = 1 \\ \frac{d\varphi}{dt} = k + \frac{d\varphi}{dt} & \cos\vartheta = \cos(\vartheta_0 + \vartheta) = \cos\vartheta_0 - \vartheta\sin\vartheta_0 \\ \tau = \frac{\pi}{2} + \tau & \sin\vartheta = \sin(\vartheta_0 + \vartheta) = \sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0 \\ \vartheta = \vartheta_0 + \vartheta & \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (43),$$

worin in nicht mißzuverstehender Weise die kleinen Abweichungen mit denselben Ausdrücken wie die gesamten Koordinaten bezeichnet wurden.

Es sind nun in den Grundgleichungen (38′) alle Koordinaten durch die Abweichungen auszudrücken, bei welcher Gelegenheit zwei von den fünf Variablen ϱ, ω_y'', φ, ϑ, τ unter Beiziehung von (39) eliminiert werden können. Als solche seien φ und ϱ gewählt. Zwischen k, ϱ_0 und $\omega_y''{}_0$ besteht die Relation

$$k\,\varrho_0 = R\,\omega_y''{}_0 \quad \ldots \ldots \quad (44),$$

wenn Rollen ohne Gleiten stattfindet. Die erste Rollbedingung (39a) erfährt folgende Umgestaltung:

$$(\omega_y''{}_0 + w_y'')^2 R^2 = (\varrho_0 + \varrho)^2 \left(k + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left[\frac{d(\varrho_0 + \varrho)}{dt}\right]^2$$

oder mit Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnung

$$\omega_y^{2\prime\prime}{}_0 R^2 + 2\,\omega_y^{2\prime\prime}{}_0\,\omega_y'' R^2 = \varrho_0{}^2 k^2 + 2\,\varrho_0\,\varrho\,k + 2\,\varrho_0{}^2 k\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Wegen (44) heben sich die ersten Glieder links und rechts weg und es bleibt nach Kürzung

$$\omega_y'' R = \varrho\,k + \varrho_0 \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (45).$$

Ferner bilde man den Ausdruck

$$\cos t\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = -\operatorname{tg}\tau = -\tau = \frac{\frac{d\varrho}{dt}}{\varrho\frac{d\varphi}{dt}}$$

nach (39b). Unter Beachtung von (43) folgt daraus

$$\tau = \frac{-\frac{d\varrho}{dt}}{(\varrho_0 + \varrho)\,k + \varrho_0\frac{d\varphi}{dt}} \quad \ldots \ldots \quad (46).$$

Dies kann nach $\frac{d\varrho}{dt}$ aufgelöst werden, und man erhält

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho_0\,\tau\left(\frac{d\varphi}{dt} + k\right) - \varrho\,\tau\,k = -\tau\,R\,\omega_y''{}_0 \quad \ldots \ldots \quad (47)$$

sowie

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -R\,\omega_y''{}_0\frac{d\tau}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

$$\varrho = -R\,\omega_y''{}_0\int\tau\,dt + c \quad \ldots \ldots \quad (49).$$

Bezüglich (49) sei bemerkt, daß hierbei die Annahme zu machen ist, daß das Integral $\int\tau\,dt$ nur einen kleinen Wert annehmen kann, was erfüllt erscheint, wenn τ eine periodische Funktion mit kleiner Amplitude ist. Faßt man die Behandlung der Probleme mit Hilfe der abzuleitenden vereinfachten Grundgleichungen so, daß zu Beginn der Zeitzählung

ϱ gleich Null ist, das Rad sich also auf dem Grundkreis befindet, dann kann die Konstante C in (49) gleich Null gesetzt werden.

Aus (45) und (49) folgt nun noch

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_y'' \frac{R}{\varrho_0} - k \frac{\varrho}{\varrho_0} = \omega_y'' \frac{R}{\varrho_0} + k \frac{R}{\varrho_0} \omega_y''{}_0 \int \tau \, dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad (50),$$

womit die beiden Variablen ϱ und φ durch die restlichen drei ausgedrückt erscheinen. Es sind nun noch die Abkürzungen u, Φ und Ψ zu behandeln. Aus den Definitionen derselben, nämlich (8b) und (11), erhält man in Verein mit (43) bis (50) unschwer

$$u = k + \omega_y'' \frac{R}{\varrho_0} + \left(\int \tau \, dt\right) k \frac{R}{\varrho_0} \omega_y''{}_0 + \frac{d\tau}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

$$\Phi = R \frac{d w_y''}{dt} - \frac{R^2 \omega_y^{2''}{}_0}{\varrho_0} \tau \quad \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

$$\Psi = -\left(\frac{R^3 \omega_y^{3''}{}_0}{\varrho_0^2} \int \tau \, dt + R \omega_y''{}_0 \frac{d\tau}{dt} + \frac{2 R^2 \omega_y''{}_0}{\varrho_0} \omega_y'' + \frac{R^2 \omega_y^{2''}{}_0}{\varrho_0}\right) \quad \ldots \quad (53).$$

Nun setzt man in die Gl. (38'd) bis (38'f) die Ausdrücke (43) bis (53) unter steter Berücksichtigung der Voraussetzungen ein und erhält das folgende System linearer Differentialgleichungen:

$$a_{11} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + a_{12} \vartheta + a_{13} \frac{d\tau}{dt} + a_{14} \int \tau \, dt + a_{15} \omega_y'' = b_1 \quad \ldots \ldots \quad (54a),$$

$$a_{22} \frac{d\vartheta}{dt} + a_{23} \frac{d^2\tau}{dt^2} + a_{24} \tau + a_{25} \frac{d\omega_y''}{dt} = b_2 \quad \ldots \ldots \quad (54b),$$

$$a_{32} \frac{d\vartheta}{dt} + a_{33} \frac{d^2\tau}{dt^2} + a_{34} \tau + a_{35} \frac{d\omega_y''}{dt} = b_3 \quad \ldots \ldots \quad (54c).$$

Die Koeffizienten sind durch die nachstehenden Beziehungen definiert:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= J_x'' \\
a_{12} &= -M R g \cos\vartheta_0 - \omega_y^{2''}{}_0 \frac{R}{\varrho_0}\left[(J_y'' - J_z'')(\cos^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta_0)\frac{R}{\varrho_0} - J_y'' \sin\vartheta_0\right] \\
a_{13} &= -\omega_y''{}_0 \cos\vartheta_0 \left[2(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + J_y''\right] \\
a_{14} &= -\omega_y^{3''}{}_0 \left(\frac{R}{\varrho_0}\right)^2 \cos\vartheta_0 \left[2(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + J_y''\right] \\
a_{15} &= -\omega_y''{}_0 \frac{R}{\varrho_0} \cos\vartheta_0 \left[2(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + 2 J_y''\right] \\
a_{22} &= 2(J_y'' - J_z'')\cos^2\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} - J_p \omega_y''{}_0 \sin\vartheta_0 \\
a_{23} &= (J_y'' - J_z'') \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0 \\
a_{24} &= \omega_y^{2''}{}_0 \left(\frac{R}{\varrho_0}\right)^2 (J_y'' - J_z'') \sin\vartheta \cos\vartheta_0 \\
a_{25} &= \cos\vartheta_0 \left[(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + J_y''\right] \\
a_{32} &= \omega_y''{}_0 \cos\vartheta_0 \left[2(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + J_p\right] \\
a_{33} &= \sin^2\vartheta_0 J_y'' + \cos^2\vartheta_0 J_z'' \\
a_{34} &= \omega_y^{2''}{}_0 \left(\frac{R}{\varrho_0}\right)^2 (\sin^2\vartheta_0 J_y'' + \cos^2\vartheta_0 J_z'') \\
a_{35} &= \frac{R}{\varrho_0}(\sin^2\vartheta_0 J_y'' + \cos^2\vartheta_0 J_z'') + J_y'' \sin\vartheta_0 \\
b_1 &= M R g \sin\vartheta_0 + M R \sin\vartheta_0 \frac{d^2 Z}{dt^2} + D_{rx}' + \omega_y''^2{}_0 \left(\frac{R}{\varrho_0}\right) \cos\vartheta_0 \\
&\qquad \left[(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + J_y''\right] + \Sigma D_x' \\
b_2 &= D_{ry}' + \Sigma D_y' \\
b_3 &= D_{rz}' + \Sigma D_z'
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (55).$$

auf der Ebene E wandern, wobei die positive Zuordnung zur Rollgeschwindigkeit im Sinne von I vorzunehmen ist. Die x'-Achse steht als Kreistangente senkrecht zu ϱ, im Mittel ist also $\tau = \frac{\pi}{2}$. Endlich habe das Rad beim Durchlaufen des Rollkreises eine Grundneigung ϑ_0, deren Vorzeichen ebenfalls im Sinne von Abb. 2 zu bewerten ist.

Die wirklichen Koordinaten sind dann

$$\left.\begin{array}{ll} \varrho = \varrho_0 + \varrho & \cos\tau = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = -\tau \\ \omega_y'' = \omega_y''{}_0 + \omega_y'' & \sin\tau = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = 1 \\ \frac{d\varphi}{dt} = k + \frac{d\varphi}{dt} & \cos\vartheta = \cos(\vartheta_0 + \vartheta) = \cos\vartheta_0 - \vartheta\sin\vartheta_0 \\ \tau = \frac{\pi}{2} + \tau & \sin\vartheta = \sin(\vartheta_0 + \vartheta) = \sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0 \\ \vartheta = \vartheta_0 + \vartheta & \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (43),$$

worin in nicht mißzuverstehender Weise die kleinen Abweichungen mit denselben Ausdrücken wie die gesamten Koordinaten bezeichnet wurden.

Es sind nun in den Grundgleichungen (38′) alle Koordinaten durch die Abweichungen auszudrücken, bei welcher Gelegenheit zwei von den fünf Variablen ϱ, ω_y'', φ, ϑ, τ unter Beiziehung von (39) eliminiert werden können. Als solche seien φ und ϱ gewählt. Zwischen k, ϱ_0 und $\omega_y''{}_0$ besteht die Relation

$$k\,\varrho_0 = R\,\omega_y''{}_0 \quad \ldots \quad (44),$$

wenn Rollen ohne Gleiten stattfindet. Die erste Rollbedingung (39a) erfährt folgende Umgestaltung:

$$(\omega_y''{}_0 + w_y'')^2 R^2 = (\varrho_0 + \varrho)^2 \left(k + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left[\frac{d(\varrho_0 + \varrho)}{dt}\right]^2$$

oder mit Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnung

$$\omega_y^{2''}{}_0 R^2 + 2\,\omega_y^{2''}{}_0\,\omega_y'' R^2 = \varrho_0^2 k^2 + 2\,\varrho_0\,\varrho\,k + 2\,\varrho_0^2 k \frac{d\varphi}{dt}.$$

Wegen (44) heben sich die ersten Glieder links und rechts weg und es bleibt nach Kürzung

$$\omega_y'' R = \varrho\,k + \varrho_0 \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots \quad (45).$$

Ferner bilde man den Ausdruck

$$\cos t\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = -\operatorname{tg}\tau = -\tau = \frac{\frac{d\varrho}{dt}}{\varrho\frac{d\varphi}{dt}}$$

nach (39b). Unter Beachtung von (43) folgt daraus

$$\tau = \frac{-\frac{d\varrho}{dt}}{(\varrho_0 + \varrho)\,k + \varrho_0 \frac{d\varphi}{dt}} \quad \ldots \quad (46).$$

Dies kann nach $\frac{d\varrho}{dt}$ aufgelöst werden, und man erhält

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho_0\,\tau\left(\frac{d\varphi}{dt} + k\right) - \varrho\,\tau\,k = -\tau\,R\,\omega_y''{}_0 \quad \ldots \quad (47)$$

sowie

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -R\,\omega_y''{}_0 \frac{d\tau}{dt} \quad \ldots \quad (48)$$

$$\varrho = -R\,\omega_y''{}_0 \int \tau\,dt + c \quad \ldots \quad (49).$$

Bezüglich (49) sei bemerkt, daß hierbei die Annahme zu machen ist, daß das Integral $\int \tau\,dt$ nur einen kleinen Wert annehmen kann, was erfüllt erscheint, wenn τ eine periodische Funktion mit kleiner Amplitude ist. Faßt man die Behandlung der Probleme mit Hilfe der abzuleitenden vereinfachten Grundgleichungen so, daß zu Beginn der Zeitzählung

ϱ gleich Null ist, das Rad sich also auf dem Grundkreis befindet, dann kann die Konstante C in (49) gleich Null gesetzt werden.

Aus (45) und (49) folgt nun noch

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_y'' \frac{R}{\varrho_0} - k \frac{\varrho}{\varrho_0} = \omega_y'' \frac{R}{\varrho_0} + k \frac{R}{\varrho_0} \omega_y''{}_0 \int \tau \, dt \quad \text{(50)},$$

womit die beiden Variablen ϱ und φ durch die restlichen drei ausgedrückt erscheinen. Es sind nun noch die Abkürzungen u, Φ und Ψ zu behandeln. Aus den Definitionen derselben, nämlich (8b) und (11), erhält man in Verein mit (43) bis (50) unschwer

$$u = k + \omega_y'' \frac{R}{\varrho_0} + \left(\int \tau \, dt\right) k \frac{R}{\varrho_0} \omega_y''{}_0 + \frac{d\tau}{dt} \quad \text{(51)}$$

$$\Phi = R \frac{d w_y''}{dt} - \frac{R^2 \omega_y^{2}{}''{}_0}{\varrho_0} \tau \quad \text{(52)}$$

$$\Psi = -\left(\frac{R^3 \omega_y^{3}{}''{}_0}{\varrho_0^2} \int \tau \, dt + R \omega_y''{}_0 \frac{d\tau}{dt} + \frac{2 R^2 \omega_y''{}_0}{\varrho_0} \omega_y'' + \frac{R^2 \omega_y^{2}{}''{}_0}{\varrho_0} \right) \quad \text{(53)}.$$

Nun setzt man in die Gl. (38'd) bis (38'f) die Ausdrücke (43) bis (53) unter steter Berücksichtigung der Voraussetzungen ein und erhält das folgende System linearer Differentialgleichungen:

$$a_{11} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + a_{12} \vartheta + a_{13} \frac{d\tau}{dt} + a_{14} \int \tau \, dt + a_{15} \omega_y'' = b_1 \quad \text{(54a)},$$

$$a_{22} \frac{d\vartheta}{dt} + a_{23} \frac{d^2\tau}{dt^2} + a_{24} \tau + a_{25} \frac{d\omega_y''}{dt} = b_2 \quad \text{(54b)},$$

$$a_{32} \frac{d\vartheta}{dt} + a_{33} \frac{d^2\tau}{dt^2} + a_{34} \tau + a_{35} \frac{d\omega_y''}{dt} = b_3 \quad \text{(54c)}.$$

Die Koeffizienten sind durch die nachstehenden Beziehungen definiert:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= J_x'' \\
a_{12} &= -M R g \cos\vartheta_0 - \omega_y^{2}{}''{}_0 \frac{R}{\varrho_0}\left[(J_y'' - J_z'')(\cos^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta_0)\frac{R}{\varrho_0} - J_y'' \sin\vartheta_0\right] \\
a_{13} &= -\omega_y''{}_0 \cos\vartheta_0 \left[2(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + J_y''\right] \\
a_{14} &= -\omega_y^{3}{}''{}_0 \left(\frac{R}{\varrho_0}\right)^2 \cos\vartheta_0 \left[2(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + J_y''\right] \\
a_{15} &= -\omega_y''{}_0 \frac{R}{\varrho_0} \cos\vartheta_0 \left[2(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + 2 J_y''\right] \\
a_{22} &= 2(J_y'' - J_z'')\cos^2\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} - J_p \omega_y''{}_0 \sin\vartheta_0 \\
a_{23} &= (J_y'' - J_z'') \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0 \\
a_{24} &= \omega_y^{2}{}''{}_0 \left(\frac{R}{\varrho_0}\right)^2 (J_y'' - J_z'')\sin\vartheta \cos\vartheta_0 \\
a_{25} &= \cos\vartheta_0 \left[(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + J_y''\right] \\
a_{32} &= \omega_y''{}_0 \cos\vartheta_0 \left[2(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + J_p\right] \\
a_{33} &= \sin^2\vartheta_0 J_y'' + \cos^2\vartheta_0 J_z'' \\
a_{34} &= \omega_y^{2}{}''{}_0 \left(\frac{R}{\varrho_0}\right)^2 (\sin^2\vartheta_0 J_y'' + \cos^2\vartheta_0 J_z'') \\
a_{35} &= \frac{R}{\varrho_0}(\sin^2\vartheta_0 J_y'' + \cos^2\vartheta_0 J_z'') + J_y'' \sin\vartheta_0 \\
b_1 &= M R g \sin\vartheta_0 + M R \sin\vartheta_0 \frac{d^2 Z}{dt^2} + D_{rx}' + \omega_y''^{2}{}_0 \left(\frac{R}{\varrho_0}\right)\cos\vartheta_0 \\
&\qquad \left[(J_y'' - J_z'')\sin\vartheta_0 \frac{R}{\varrho_0} + J_y''\right] + \Sigma D_x' \\
b_2 &= D_{ry}' + \Sigma D_y' \\
b_3 &= D_{rz}' + \Sigma D_z'
\end{aligned}\right\} \quad \text{(55)}.$$

Bei der Zusammenstellung der Koeffizienten ist der Einfluß der Schwerkraft von den anderen eingeprägten Momenten getrennt worden, die Wirkung der allenfalls auftretenden äußeren Kräfte $\bar{p}$ hat man sich bereits unter den Momenten D enthalten zu denken.

Im allgemeinen ist zu den Gleichungen (54) und (55) zu sagen, daß sie trotz der vorgenommenen Vereinfachungen noch immer einen ziemlich verwickelten Aufbau zeigen, doch ist ihre Integration besonders in weiter spezialisierten Fällen verhältnismäßig einfach durchzuführen, wie in späteren Aufsätzen gezeigt werden soll.

Der Vollständigkeit halber seien noch die weniger wichtigen Gleichungen (38′a) bis (38′c), welche zur Berechnung der Raddrucke W dienen, in gleicher Weise umgeformt hier angeführt:

$$\left.\begin{aligned}
c_{11}\frac{d^2\tau}{dt^2} + c_{12}\cdot\tau + c_{13}\cdot\frac{d\omega_y''}{dt} &= \Sigma P_x' + W_x' \\
c_{21}\frac{d\tau}{dt} + c_{22}\int\tau\,dt + c_{23}\cdot\omega_y'' + c_{24}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + c_{25}\,\vartheta + c_{26} &= \Sigma P_y' + W_y' \\
c_{34}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= \Sigma P_z' + W_z' - M\frac{d^2 Z}{dt^2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (56),$$

worin

$$\left.\begin{aligned}
c_{11} &= M R \sin\vartheta_0 & c_{24} &= -M R\cos\vartheta_0 \\
c_{12} &= M R\left(\frac{R}{\varrho_0}\right)^2 \omega_y{}^{2''}{}_0 \sin\vartheta_0 & c_{25} &= M R\left(\frac{R}{\varrho_0}\right)^2 \omega_y{}^{2''}{}_0 \cos\vartheta_0 \\
c_{13} &= M R\left(1 + \frac{R}{\varrho_0}\sin\vartheta_0\right) & c_{26} &= M R\left(\frac{R}{\varrho_0}\right)\left(1 + \frac{R}{\varrho_0}\sin\vartheta_0\right)\omega_y{}^{2''}{}_0 \\
c_{21} &= M R\left(1 + 2\frac{R}{\varrho_0}\sin\vartheta_0\right)\omega_y''{}_0 & c_{34} &= -M R\sin\vartheta_0 \\
c_{22} &= M R\left(\frac{R}{\varrho_0}\right)^2\left(1 + 2\frac{R}{\varrho_0}\sin\vartheta_0\right)\omega_y{}^{3''}{}_0 & & \\
c_{23} &= 2 M R\left(\frac{R}{\varrho_0}\right)\left(1 + \frac{R}{\varrho_0}\sin\vartheta_0\right)\omega_y''{}_0 & &
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (57).$$

100

Zur statistischen Deutung der Kármánschen Ähnlichkeitshypothese in der Turbulenztheorie.

Von *F. Noether* in Breslau.

Herr v. Kármán hat kürzlich eine Betrachtung über das Turbulenzproblem veröffentlicht[1]), die geeignet erscheint, dieses noch immer ungelöste Rätsel seiner Aufklärung näher zu führen. Die Kármánsche Untersuchung, die sich der Einfachheit halber auf den 2-dimensionalen Fall der Strömung in einem Kanal beschränkt, sieht im Innern der Strömung von der unmittelbaren Wirkung der Flüssigkeitsreibung gänzlich ab; diese wirkt nur indirekt mit, insofern sie in der Grenzschicht an den Wänden des Kanals die dort laminare Schubspannung ins Innere der Strömung fortsetzt. Die Hypothese fordert nun, daß — die mittlere Grundströmung als Parallelströmung in der x-Richtung angenommen — die turbulente Schwankungsbewegung in Störungen bestehe, die in der zu x senkrechten y-Richtung eine verhältnismäßig geringe Ausdehnung haben und — wenigstens in einem gewissen Zeitraum — angenähert als stationäre Strömungsgebilde von der Hauptströmung mitgenommen werden. Diese Störungen sollen untereinander der Strömungsform nach als ähnlich, d. h. nur in der Amplitude und in einer Längendimension von Schicht zu Schicht verschieden angenommen sein. Aus dieser Hypothese, in Verbindung mit den hydrodynamischen Grundgleichungen und den Konstanten der Schubspannungsgleichung, leitet v. Kármán Folgerungen über das Geschwindigkeitsprofil und den Widerstand ab, die dem beobachteten Verlauf dieser Größen sehr nahe kommen. Um diese Folgerungen zu finden, ist eine aus der Hypothese fließende Dimensionsbetrachtung ausreichend.

[1]) Th. v. Kármán: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Göttinger Nachrichten, math.-phys. Kl. 1930, S. 58.

Es erhebt sich sofort die Frage, ob diese Hypothese und damit ihre Folgerungen hydrodynamisch näher verstanden werden können. Ich habe mich bemüht, dies im Anschluß an die bisherigen Ansätze des Turbulenzproblems mit den gebotenen Abänderungen durchzuführen, bin aber bei dieser Betrachtung zu der Überzeugung gekommen, daß schon hier keine rein hydrodynamische Frage mehr vorliegt, sondern daß zur Begründung die Statistik herangezogen werden muß. Obwohl ich nun noch keine Resultate erzielt habe, die quantitativ über die Kármánschen Folgerungen hinausgehen, halte ich es doch für berechtigt, den Gang dieser Überlegungen kurz mitzuteilen, weil die Deutung, die ich für die Hypothese als notwendig ansehe, den Weg zu eröffnen scheint, nach dem in präziserer Weise die Statistik auf das Turbulenzproblem angewandt werden kann. Um Mißverständnisse zu vermeiden, will ich vorausschicken, daß ich hier nicht die Hypothese selbst untersuche, die in Wirklichkeit nicht genau erfüllbar ist, sondern eben die genannten Folgerungen.

1. Die Kármánsche Betrachtung. Der Ausgangspunkt dieser Untersuchung ist die Gleichung für die Stromfunktion Φ, in der sich die hydrodynamischen Gleichungen nach Elimination des Druckes zusammenfassen lassen:

$$\varrho\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\Phi}{\partial x}-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\Phi}{\partial y}\right]=\mu\,\Delta\Delta\Phi,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\quad\ldots\ldots\quad(1),$$

worin ϱ die Dichte und μ die Reibungskonstante der Flüssigkeit bedeutet. Es ist hierbei die Geschwindigkeit zu $u=\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $v=-\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ angenommen. Diese Strömung wird in eine Grundströmung mit der Stromfunktion $\Phi_0(y)$ und der Geschwindigkeit $U_0(y)$, sowie eine überlagerte Schwankungsbewegung mit der Stromfunktion $\varphi(x, y)$ zerlegt, und von dem Reibungsglied auf der rechten Seite von (1) wird weiterhin abgesehen. Die obige Hypothese läßt sich nun so aussprechen, daß in der Umgebung jeder Schicht $y=y_i$ eine nur von y_i abhängige Amplitude $A(y_i)$ und ebensolche Längendimension $L(y_i)$ bestehen soll, so daß die Transformation:

$$x-t\,U(y_i)=\xi\cdot L(y_i);\quad y-y_i=\eta\cdot L(y_i);\quad \varphi(x,y)=A(y_i)\,f(\xi,\eta)\quad\ldots\quad(2)$$

die Gl. (1) in eine Differentialgleichung für $f(\xi,\eta)$ verwandeln soll, deren Koeffizienten in der Umgebung der Schicht y_i von y_i unabhängig sein sollen.

Die neue Differentialgleichung lautet in der Umgebung dieser Schicht:

$$U_0'\,L\,\eta\,\frac{A}{L^3}\frac{\partial \Delta f}{\partial \xi}-\frac{A}{L}\frac{\partial f}{\partial \xi}U_0''+\frac{A^2}{L^4}\left[\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \Delta f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \Delta f}{\partial \eta}\right]=0\quad\ldots\ldots\quad(3),$$

wobei das Symbol Δ nunmehr auf die Variabeln ξ,η zu beziehen ist. Wenn die Lösungen dieser Gleichung der Voraussetzung gemäß unabhängig von y_i sein sollen, so müssen ihre Koeffizienten $U_0'\,L$, $\frac{A\,U_0''}{L}$, $\frac{A^2}{L^4}$, die einzelnen von y_i abhängen, in einem konstanten, von y_i unabhängigen Verhältnis zueinander stehen. Man kann diese zwei Forderungen so schreiben:

$$\frac{U_0'\,L^2}{A}=\text{const}\,(k_1)\quad\ldots\ldots\quad(4a),$$

$$\frac{L\,U_0''}{U_0'}=\text{const}\,(k_2)\quad\ldots\ldots\quad(4b).$$

Sie geben einerseits in (4b) eine Größenordnung für die charakteristische Längendimension L (den „Mischungsweg" nach Prandtl[2]); vgl. die Einleitung und Nr. 4 der Kármánschen Arbeit) bei gegebenem Strömungsprofil, andererseits in (4a) eine Größenordnung für die Amplitude A der Schwankungsbewegung. Der letztere Punkt, der auf der Mitberücksichtigung der in f quadratischen Glieder von (3) beruht, ist der, in dem die Kármánsche Betrachtung am entscheidendsten von den bisherigen Ansätzen im Turbulenzproblem abweicht. Die Tatsache, daß die Schubspannung in der turbulenten Strömung sich durch den Mittelwert des Impulstransportes, nämlich der Größe $-\varrho\,u\,v$ ausdrückt[3]) und wegen des konstanten Druckgefälles linear von y_i abhängen muß, liefert endlich durch Einsetzen aus (4a) und (4b) eine Gleichung für das Geschwindigkeitsprofil, die nur noch eine empirisch zu ermittelnde Konstante enthält.

[2]) Verh. d. 2. intern. Kongr. f. techn. Mech. Zürich 1926. Ausführliche Darstellung dieser Theorie und Lit. s. bei W. Tollmien: Turbulente Strömungen. Hndb. d. Experimentalphysik, Bd. 4, I. S. 309 bis 325.

[3]) Vgl. z. B. H. A. Lorentz: Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegung. Abh. über Theor. Phys. Leipzig 1907. S. 43.

2. Anschluß an die bisherigen Ansätze der Turbulenztheorie. Wenn man sich die Frage vorlegt, ob Schwankungsbewegungen der Art, wie sie in Nr. 1 gefordert werden, in Analogie zu den bisherigen Ansätzen der Turbulenztheorie als stationäre Störungen aufgestellt werden können, so kommen wegen der erwähnten Mitberücksichtigung der quadratischen Glieder nur diejenigen Versuche in Betracht, die auf eine Bestimmung der Störungen von endlicher Amplitude hinzielten[4]). Am nächsten kommt dieser Fragestellung ein Ansatz des Verfassers, in dem die Entwicklung der stationär gedachten Lösungen der Grundgleichung (1) in eine Fouriersche Reihe gefordert wird, entsprechend der periodischen Wiederholung des Störungszustandes in der x-Richtung[5]). Ich wiederhole diesen Ansatz hier der etwas kürzeren Rechnung wegen in komplexer Form.

Die Lösungen der Gl. (1), die relativ zu der Geschwindigkeit U_0 der Schicht y_i stationär sein sollen $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}=0\right)$, werden hier gesucht in der Form:

$$\Phi(x,y)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\,\varphi_n(y)\cdot e^{i n \alpha x} \qquad (5).$$

Die φ_n sind dabei allgemein als beliebige komplexe Funktionen, aber φ_n und φ_{-n} als zueinander konjugiert anzunehmen. Für den allgemeinen Ansatz kämen zu der Gl. (1) die Randbedingungen hinzu, daß u und v an den Wänden verschwinden sollen. Da jetzt das Reibungsglied auf der rechten Seite von (1) unterdrückt werden soll, so bleibt jedoch nur die Forderung, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, bzw. alle $\varphi_n(y)$ (ausgenommen $\varphi_0(y)$) gegen Null gehen sollen für alle $y-y_i$, die hinreichend groß sind im Maßstab der oben definierten Größe $L(y_i)$. Wenn zweimalige Differenzierbarkeit der Reihe (5) vorausgesetzt wird, so folgt:

$$\Delta\Phi(x,y)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[\varphi_n''(y)-n^2\alpha^2\varphi_n(y)\right]\cdot e^{i n\alpha x} \qquad (5a).$$

Diese Reihen sind in die nichtlineare Gl. (1) einzusetzen und ergeben eine zusammengesetzte, wieder nach Potenzen von $e^{i\alpha x}$ zu ordnende Reihe, deren einzelne Glieder nach bekannten Sätzen über Fourierreihen verschwinden müssen. So erhält man als Faktor des Gliedes $e^{i l \alpha x}$ in der neuen Reihe:

$$\sum_{m+n=l} i n\alpha\varphi_n\left[\varphi_m'''-m^2\alpha^2\varphi_m'\right]-\varphi_n' i m\alpha\left[\varphi_m''-m^2\alpha^2\varphi_m\right]=0 \qquad (6).$$

Das sind unendlich viele Differentialgleichungen für die Koeffizienten $\varphi_n(y)$. Bemerkenswert ist darunter zunächst die Gleichung für den Index $l=0$:

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^{\infty}{}_n\, n\big[\varphi_n(\varphi_{-n}'''-n^2\alpha^2\varphi_{-n}')-\varphi_{-n}(\varphi_n'''-n^2\alpha^2\varphi_n')+\varphi_n'(\varphi_{-n}''-n^2\alpha^2\varphi_{-n})\\ -\varphi_{-n}'(\varphi_n''-n^2\alpha^2\varphi_n)\big]=0.\end{aligned}\right\} \qquad (7).$$

Die Glieder, die α^2 enthalten, fallen hier fort, und es bleibt nach einfacher Zusammenfassung:

$$\sum_1^{\infty}{}_n\, n\left[\varphi_n\varphi_{-n}'-\varphi_{-n}\varphi_n'\right]''=0.$$

Es folgt also, und dies ist nichts anderes als die Gleichung für die mittlere Schubspannung in der Strömung:

$$\sum_1^{\infty}{}_n\, n\left[\varphi_n\varphi_{-n}'-\varphi_{-n}\varphi_n'\right]=a\,y+b \qquad (7a).$$

Denn da φ_n und φ_{-n} konjugiert imaginär sind, ist die Größe auf der linken Seite in der Tat dem örtlichen Mittelwert von $-\varrho u v=\varrho\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ proportional, der sich so, wie oben erwähnt, als lineare Funktion der Ordinate y ergibt. Die Konstanten dieser linearen Beziehung muß man sich als durch die laminare Schicht am Rande bestimmt denken, und sie dürfen nicht beide verschwinden. Das heißt, daß die φ_n, oder wenigstens einige derselben, komplexe Funktionen sein müssen, da reelle φ_n, auch wenn eine komplexe Amplitude hinzukäme, die linke Seite von (7a) zu 0 machen würden. Man kann dies auch so ausdrücken, daß für die aus φ_n ab-

[4]) Vgl. den Bericht des Verfassers: Das Turbulenzproblem. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 1, S. 125. 1921.
[5]) Zur Theorie der Turbulenz (Vortrag Wien 1913). Jahresber. d. D. Math. Ver. XXIII, 1914, S. 138.

geleiteten Geschwindigkeitskomponenten u_n, v_n der Phasenunterschied von $\frac{1}{2}\pi$ verschieden sein muß, wie insbesondere H. A. Lorentz in der oben zitierten Arbeit bemerkt hat.

Den bisherigen Versuchen der hydrodynamischen Behandlung des Turbulenzproblems entsprach die Annahme, daß in der Entwicklung (5) die Funktionen 0-ter Ordnung φ_0 und erster Ordnung φ_1, φ_{-1} stark über alle andern überwiegen (vgl. die zitierten Noten des Verfassers). Es bleibt dann, außer der entsprechend verkürzten Gl. (7a), nur eine lineare Gleichung für die Funktionen 1-ter Ordnung:

$$U_0 \cdot (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U_0'' \varphi = 0\,, \qquad (U_0 = \varphi_0') \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

die der Turbulenztheorie, natürlich unter Hinzunahme der Reibungsglieder, zugrunde gelegt wurde. Die Auffassung war dabei die, daß man zwar mit endlichen Abweichungen vom laminaren Zustand rechnen müsse; daß aber diese Endlichkeit nur in der Funktion $U_0(y)$ zum Ausdruck käme. Die Ergebnislosigkeit dieser Versuche, in Verbindung mit dem Resultat der Kármánschen Ähnlichkeitsbetrachtung, zeigte, daß dieser Standpunkt zu eng war. Es ist, wenn man sich auf eine Annäherung beschränken will, zum mindesten notwendig, die Funktionen 2-ter Ordnung, φ_2 und φ_{-2}, mit zu berücksichtigen. In dieser Stufe der Annäherung hat man es, außer der entsprechend verkürzten Gl. (7a), mit folgenden 4 Gleichungen zu tun:

$$\left.\begin{array}{l} U_0(\varphi_1'' - \alpha^2 \varphi_1) - U_0'' \varphi_1 + 2\varphi_2 \varphi_{-1}''' + \varphi_2' \varphi_{-1}'' - 2(\varphi_2'' - 3\alpha^2 \varphi_2)\varphi_{-1}' \\ \qquad - (\varphi_2''' - 3\alpha^2 \varphi_2')\varphi_{-1} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (9).$$

Eine entsprechende Gleichung, unter Vertauschung der Vorzeichen in den Indizes, gilt für die Funktion φ_{-1}. Ferner gilt für die 2-te Ordnung:

$$U_0(\varphi_2'' - \alpha^2 \varphi_2) - U_0'' \varphi_2 + (\varphi_1 \varphi_1'' - \varphi_1'^2)' = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9a),$$

und entsprechend durch Vertauschung der Indizesvorzeichen für φ_{-2}. Die wenigstens qualitative Behandlung der Gl. (9), (9a) ist nicht schwierig, wenn man beachtet, daß die Gl. (9) ein lineares Gleichungssystem für die Funktionen φ_1 und φ_{-1} darstellen, sofern die Grundströmung U_0 und die der zweiten Ordnung φ_2, φ_{-2} als bekannt vorausgesetzt sind; daß andererseits φ_2 aus (9a) als einer inhomogenen linearen Differentialgleichung bestimmt ist, sofern außer U_0 bereits φ_1 als bekannt vorausgesetzt wird. Um hieraus φ_2 qualitativ zu bestimmen, ist es ausreichend, von der Tatsache Gebrauch zu machen, daß φ_1 den Randbedingungen gemäß mit wachsendem Argument nach beiden Seiten rasch (und zwar exponentiell) abnimmt. Die Durchführung dieser qualitativen Diskussion führt, z. B. in der Mitte der Strömung, wo U_0' annähernd als 0 vorausgesetzt werden kann, zu einem Doppelwirbelsystem als Schwankungsströmung nach Art der Abb. 1. Dieses mehr im Anschluß an die bisherige Behandlungsweise abgeleitete Näherungsergebnis, das an die von Kármán untersuchten Wirbelstraßen[6]) erinnert, vermittelt den Übergang zu der folgenden allgemeineren und vollständigeren Auffassung des Vorganges in der turbulenten Strömung. Ein genaueres Eingehen auf die skizzierte Diskussion kann daher hier entbehrt werden.

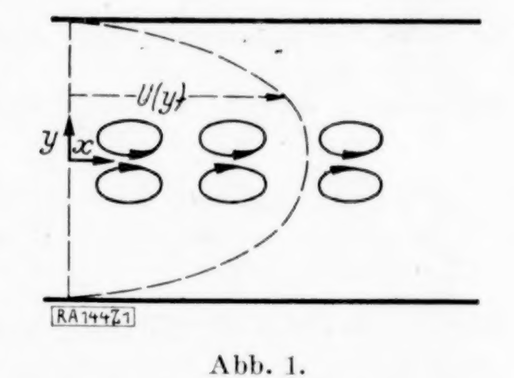


Abb. 1.

3. Benutzung der Helmholtzschen Wirbelintegrale in der Turbulenztheorie. Die Kármánsche Untersuchung geht, wie auch andere in der bisherigen Turbulenztheorie, mit Recht von reibungsfreien Strömungen aus, da die Reibung mehr eine indirekte Rolle spielt, indem sie die Konstanten a, b der Schubspannungsgleichung (7a) beeinflußt. Es ist aber zu wenig beachtet worden, daß unter diesen Umständen die Helmholtzschen Wirbelsätze den völlig adäquaten Ausdruck zu der Grundgleichung (1) darstellen. Sie enthalten im stationären Falle die Integralaussage, daß die Kurven konstanter Wirbelintensität $\Delta\phi$ mit den Stromlinien $\phi = \text{const}$ übereinstimmen, also

$$\Delta\phi = F(\phi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

gilt. Im nichtstationären Fall geben sie wenigstens ein einfaches Bild, das den Verlauf der Wirbelströmung verfolgen läßt. Es ist daher gar nicht nötig, wie es bisher stets geschah, von dieser Grundgleichung (1) selbst bei der Diskussion auszugehen. Die Existenz der Helmholtzschen Wirbel an sich ist ja bekannt. Die bisher stets, auch bei den reibungslosen Untersuchungen gestellte Frage, ob geeignete Lösungen der

[6]) Göttinger Nachr. 1911, S. 509; 1912, S. 547. Phys. Ztsch. 13, S. 49, 1913. S. a. Lamb, Hydrodynamik, 5. engl. oder 2. deutsche Aufl., Kap. VII, § 156.

Gl. (1) überhaupt existieren, ist also überflüssig, und konnte nur durch den Gedanken einer linearen Annäherung an eine gegebene Grundströmung so sehr in den Vordergrund treten. Die eigentliche Schwierigkeit aber ist nur die Frage, ob solche Lösungen existieren, für die die Konstanten a, b der Schubspannungsgleichung (7a) nicht beide verschwinden. Denn diese Konstanten müssen ja den Anschluß an die Grenzschichtströmung vermitteln.

Wir wollen daher die folgende, sicher noch vereinfachte Modellvorstellung für die turbulente Strömung zugrunde legen: Die Wirbel sollen nicht akzessorisch zu einer gegebenen Grundströmung hinzutreten, wie es den bisherigen Vorstellungen meist entsprach, sondern die ganze Strömung soll in ähnlicher Weise aus Wirbelreihen aufgebaut werden, wie dies bei der oben genannten Kármánschen Wirbelstraßenanordnung der Fall ist (vgl. Abb. 2). Um die ganze Grundströmung so aufbauen zu können, ist es nötig, nicht nur zwei Wirbelreihen, sondern eine größere Zahl anzunehmen, deren Intensität vom Rand nach dem Innern hin abnimmt, und die sich selbst dann mit verschiedener Geschwindigkeit bewegen. Diese Wirbelreihen sind allerdings nicht streng genommen im Gleichgewicht, wie die Kármánschen, sie führen vielmehr außer der von den andern Wirbelreihen herrührenden Längsströmung unter dem Einfluß der Nachbarreihen kleine Querbewegungen aus. Diese Quereinflüsse heben sich aber, wie man leicht sieht, im Mittel auf, da benachbarte Reihen verschiedene Geschwindigkeit haben, daher übereinander wegstreichen und das Vorzeichen ihres gegenseitigen Einflusses fortwährend wechselt. Von diesem Standpunkt aus handelt es sich also nicht um Wirbel, die einer gegebenen geschichteten Strömung überlagert sind, sondern die Schichtung der Strömung ist ja selbst mit Wirbelschichten äquivalent. Diese Wirbelschichten erscheinen nur in eine Reihe von diskreten Wirbeln aufgelöst.

Diese einfache Vorstellung kann nun zwanglos mit den beiden Kármánschen Ähnlichkeitsgleichungen (4a) und (4b) in Übereinstimmung gebracht werden, wie im folgenden gezeigt wird.

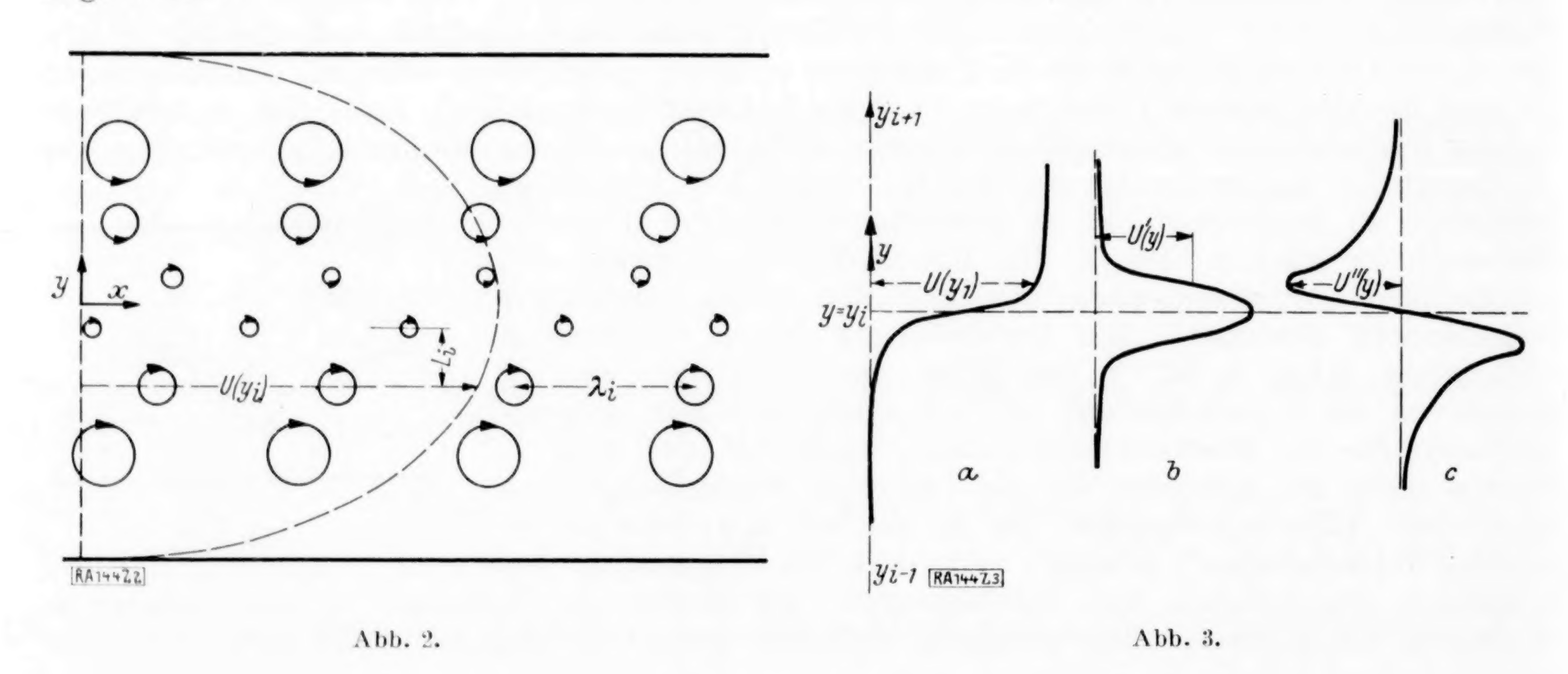


Abb. 2. Abb. 3.

4. Die Gleichung für den ersten Geschwindigkeitsgradienten der Grundströmung. Die Wirbelreihe soll sich auf der Ordinate $y = y_i$ befinden, A sei die Amplitude (Zirkulation) des einzelnen Wirbels, $\lambda = \frac{\pi}{\alpha}$ der Abstand zwischen benachbarten Wirbeln der Reihe, U_i die Geschwindigkeit der Schicht y_i. Dann ist die zugehörige Stromfunktion in der Umgebung dieser Schicht (für die komplexe Einheit $\sqrt{-1}$ ist j gesetzt):

$$\varphi = A \cdot \text{Realteil}\,[\log \sin \alpha z]\,. \qquad [\,(z = x + j\,(y - y_i)\,]\,.$$

Der Verlauf dieser Funktion ist durch Entwicklung leicht zu übersehen. Für $y - y_i > 0$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= U_i\,(y - y_i) + A \cdot \text{Realteil} \log \left[e^{-j\alpha z}\,\frac{1}{2}\,(e^{2j\alpha z} - 1)\right] \\ &= C_+ + (U_i + A\,\alpha)\,(y - y_i) - A \cdot \left[e^{-2\alpha(y - y_i)} \cos 2\,\alpha x + \frac{1}{2}\,e^{-4\alpha(y - y_i)} \cos 4\,\alpha x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}\,e^{-6\alpha(y - y_i)} \cos 6\,\alpha x + \dots\right] \end{aligned}\right\} \quad . \ (11).$$

Entsprechend für $y - y_i < 0$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= U_i\,(y-y) + (U_i - A\,a)\,(y-y_i) - A\cdot\text{Realteil}\log\left[e^{j\,a\,z}\,\frac{1}{2}\,(1-e^{-2\,j\,a\,z})\right]\\ &= C_- + (U_i - A\,a)\,(y-y_i) - A\cdot\sum_1^\infty \frac{1}{n}\,e^{+2\,n\,a\,(y-y_i)}\cos 2\,n\,a\,x\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11\,\text{a}),$$

also für $(y - y_i)$-Werte, die hinreichend groß sind gegen $\frac{1}{2\,a} = \frac{\lambda}{2\,\pi}$:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = U_i + \pi\,\frac{A}{\lambda}\ \text{für}\ y - y_i > 0;\ u = U_i - \pi\,\frac{A}{\lambda}\ \text{für}\ y - y_i < 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Das bedeutet, daß die Hauptgeschwindigkeit u in der Wirbelschicht anwächst im Sinne der Abb. 3a. Ist L der Abstand der benachbarten Wirbelschichten in Abb. 2 oder die auf die einzelnen Wirbelschichten entfallende Breite des Flüssigkeitsstroms, die von Schicht zu Schicht veränderlich sein soll, so ist demnach als mittlerer Geschwindigkeitsanstieg aufzufassen die Größe:

$$\overline{U'} = \frac{u\,(y_i+\varepsilon) - u\,(y_i-\varepsilon)}{L\,(y_i)} = \frac{2\,\pi\,A}{\lambda\,L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Diese so einfach aus dem angenommenen Strömungsmodell resultierende Gleichung stimmt mit der Kármánschen Gleichung (4a) überein, wenn ein konstantes Verhältnis zwischen der Wellenlänge λ und der Schichtbreite L besteht. Warum ein solches konstantes Verhältnis angenommen werden kann, wird im folgenden noch näher begründet. Es sei betont, daß diese wichtige Gleichung (4a) also nur sinnvoll ist, wenn $\overline{U'}$ in solcher gemittelten Bedeutung aufgefaßt wird, nicht wenn die wahre Verteilung U' gemäß Abb. 3b zugrunde gelegt wird[7]).

Erwähnt sei noch, daß die Gleichungen (11), (11a) nichts anderes als die in Nr. 2 postulierte Fourierentwicklung für den jetzigen Strömungsfall bedeuten. Die einzelnen Fourierglieder $\varphi_n = \frac{A}{n}\,e^{\pm 2\,n\,a\,(y-y_i)}\cos 2\,n\,a\,x$ sind Potentialfunktionen bis auf die Schicht $y - y_i = 0$, wo $\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}$ unstetig, nämlich $\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_+} - \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_-} = 4\,a\cos 2\,n\,a\,x$ wird. Diese Schicht erscheint also in den einzelnen Komponenten als Wirbelschicht. Andererseits sind aber in dieser Zerlegung auch Querkomponenten der Geschwindigkeit vorhanden, nämlich:

$$v_n = -\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} = 2\,a\sin 2\,n\,a\,x\ \text{für}\ y - y_i = 0.$$

Die einzelnen Komponenten der Fourierzerlegung genügen daher nicht der Grundgleichung (1). Denn diese fordert gemäß dem Integral (10), daß die Stromkurven mit den Kurven konstanter Wirbeldichte zusammenfallen, also jedenfalls keine Komponenten der Geschwindigkeit senkrecht zu der Wirbelschicht vorhanden wären. Nicht die einzelnen Glieder der Fourierentwicklung, sondern nur die Summe der Reihe genügt der Grundgleichung der Turbulenz, wie es dem in Nr. 2 angegebenen Lösungsverfahren entspricht. Es erscheint hiernach natürlich, daß alle Versuche, dem Turbulenzproblem durch lineare Überlagerung einer parallelen Grundströmung mit in x harmonischen Lösungen näher zu kommen, scheitern mußten.

5. Die Gleichung für den zweiten Geschwindigkeitsgradienten der Grundströmung. Die Deutung der Kármánschen Beziehung (4b) führt weiter und hängt enger mit der Frage nach der Entstehung der mittleren Schubspannung in der turbulenten Strömung zusammen, deren linearer Verlauf Gl. (7a) entspricht. Der oben betonte Unterschied zwischen dem wahren Wert U' und dem Mittelwert $\overline{U'}$ tritt hier verstärkt in Erscheinung. Die eigentümliche Sachlage ist die, daß die aus der empirischen Kurve gut bestätigte Beziehung (4b) für U'' gemäß der Darstellung in Nr. 1 aus der Differentialgleichung (1) abgeleitet wird, daß aber der der Beobachtung allein zugängliche mittlere Wert $\overline{U''}$ gar nicht in die Differentialgleichung eingeht. Der Wert U'' der Differentialgleichung ist eine nach Abb. 3c mit y rasch veränderliche Größe, während unter dem beobachtbaren Wert $\overline{U''}$ nichts anderes verstanden werden

[7]) Im Ergebnis verwandt ist bei L. Prandtl eine Größenschätzung der Quergeschwindigkeiten v; vgl. Tollmien, l. c. S. 312.

kann, als die Ableitung $\frac{\partial \overline{U'}}{\partial y_i}$ des in Gl. (13) definierten Mittelwerts $\overline{U'}(y_i)$. Zwischen diesen beiden Größen besteht aber keine unmittelbare Verbindung, da sich über die Größe des Reihenabstands $L(y_i)$ in Abb. 2 rein hydrodynamisch sicher nichts aussagen läßt. Die anfängliche Deutung der Gl. (4b) aus der Ähnlichkeitshypothese erscheint mir daher nicht mehr stichhaltig, und es entsteht die Frage, wie diese empirisch doch gut bestätigte Beziehung aufzufassen ist.

Diese Schwierigkeit wird eng mit einer anderen zusammenhängen. Wegen der Schubspannungsgleichung (7a), die bei Kármán schließlich das Geschwindigkeitsprofil bestimmt, darf, wie oben schon erwähnt, das Integral $\int \overline{u v}\, d x$, über eine Periode der Wirbelschicht erstreckt, nicht verschwinden. Das setzt, wie schon H. A. Lorentz (l. c.) bemerkt hat, eine unsymmetrische Gestalt des einzelnen Wirbels voraus, wenigstens wenn es sich um einen stationären oder im Mittel stationären Zustand handelte. Der Einzelwirbel müßte etwa die Gestalt nach Abb. 4 haben, wobei $U(y_{i+1}) > U(y_i)$ vorausgesetzt ist. Ein solcher Wirbel kann als einzelner Wirbel in größerer Entfernung von festen Begrenzungen bestimmt nicht existieren, da die in der Nähe der großen Achse des Wirbels befindlichen Teile um den Mittelpunkt herumgeführt würden, und so wieder eine kreissymmetrische Wirbelform entstehen müßte. Auch im Verband einer stationären Wirbelreihe ist eine solche Form nicht möglich. Sie könnte höchstens dadurch vielleicht im Gleichgewicht gehalten werden, daß man sich schon die einzelnen Wirbel der Reihe wie eine Art Planetensystem aus größeren Kernen und kleineren Trabanten zusammengesetzt denkt, die von Wirbel zu Wirbel fortschreitende Phase haben. Aber auch dieser Zustand hätte bestimmt einen sehr labilen Charakter und kann nicht ernsthaft zur Erklärung der nichtverschwindenden Schubspannung in Frage kommen.

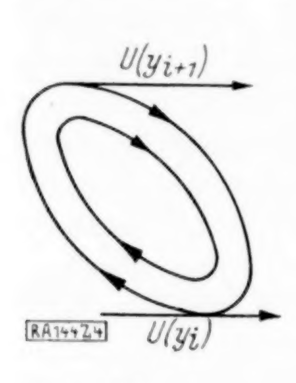


Abb. 4

Vielmehr scheint mir aber gerade die Tatsache, daß eine einzelne gerade Wirbelreihe, auch schon wenn die einzelnen Wirbel Kreissymmetrie haben, immer einen labilen Strömungszustand darstellt, für das Verständnis des Vorgangs entscheidend. Eine einzelne Wirbelreihe in Abb. 2 kann nämlich nur existieren (vgl. die Wirbelstraßentheorie, l. c.), wenn die gegenseitigen Abstände genau eingehalten sind, und an beiden Enden ein Wirbel festgehalten gedacht ist. Denn z. B. die Entfernung eines Wirbels aus der Reihe würde nach den Helmholtzschen Sätzen eine Drehung der Teile der Wirbelreihe nach sich ziehen, die der Lücke benachbart sind.

Man kann daher als Grundlage für die Behandlung des gesamten nach Abb. 2 gedachten Wirbelkomplexes festlegen: Es wird eine bestimmte, noch näher zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit dafür bestehen, daß einzelne Wirbel ihre Reihe verlassen und in eine benachbarte übertreten. In der Tat belehrt eine ziemlich rohe Betrachtung der Oberfläche eines genügend tiefen und breiten Flusses, daß einzelne leicht beobachtbare Wirbel im allgemeinen sich geradlinig bewegen, gelegentlich aber in eine benachbarte Reihe, und zwar meist nach der Seite des Ufers hin, übertreten. Man kann von diesem Gesichtspunkt die Turbulenztheorie als eine Erweiterung der Kármánschen Stabilitätstheorie der Wirbelstraße auffassen. Das Gleichgewicht ist aber hier nicht mehr im dynamischen, sondern im statistischen Sinn gemeint. Die Wirbel werden sich im allgemeinen mehr nach dem Ufer zu bewegen, da sie dort durch Reibung zerstört oder geschwächt werden, so daß sie im allgemeinen nur mit geringerer Intensität zurückkehren. In dieser Weise wird die zur Entstehung der Schubspannung notwendige Unsymmetrie in zwangloser Weise zu verstehen sein.

Eine vorläufig geringe Präzisierung dieser Auffassung wird nun sofort zur Deutung der zweiten Kármánschen Dimensionsbeziehung (4b) führen. Die Gleichgewichtsstörungen der betrachteten Reihe, in der alle Größen mit Index i bezeichnet seien, erfolgen in der Hauptsache dadurch, daß die Nachbarreihen vom Index $i+1$, bzw. $i-1$ die schon in Nr. 3 erwähnten periodischen Querbewegungen der Wirbel von Reihe i hervorrufen. Wenn solche Querbewegungen sich summieren, so können sie zum Austritt eines Wirbels und Übertritt in eine Nachbarreihe führen. Es ist daher ein plausibler Ansatz, wenn man, soweit die Störungen durch die Reihe $i+1$ hervorgerufen sind, die Austrittswahrscheinlichkeit mit der Wirbelintensität dieser Nachbarreihe, d. h. dem Produkt $A_{i+1} a_{i+1}$ proportional annimmt. Andererseits ist nach den Helmholtzschen Sätzen die Geschwindigkeit, die 2 Wirbel sich gegenseitig erteilen, ihrer eigenen Intensität umgekehrt proportional, so daß die Austrittswahrscheinlichkeit, pro Zeiteinheit gerechnet, sich mit $\frac{A_{i+1} a_{i+1}}{A_i a_i}$ proportional ergibt. Genau analog ist die Eintrittswahrscheinlichkeit aus der Reihe $i+1$ in die

Reihe i mit $\frac{A_i a_i}{A_{i+1} a_{i+1}}$ proportional anzunehmen; also die gesamte Änderungswahrscheinlichkeit der Wirbelintensität in der Reihe i, soweit sie von der Seite $i+1$ herrührt, proportional zu

$$w_{i,\,i+1} = \frac{A_{i+1} a_{i+1}}{A_i a_i} - \frac{A_i a_i}{A_{i+1} a_{i+1}} \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Genau das Gleiche gilt nach der anderen Seite, der Reihe $i-1$ hin, und damit statistisches Gleichgewicht herrscht, muß die Austauschwahrscheinlichkeit nach dieser Seite hin, $w_{i-1,\,i}$ mit $w_{i,\,i+1}$ übereinstimmen. Es ergibt sich also, daß die gemäß (14) zwischen je 2 benachbarten Reihen berechnete Größe eine vom Index i unabhängige Konstante ist. Wenn man in den Brüchen noch mit dem Abstand L_i der benachbarten Reihen kürzt und Gl. (13) benutzt, so heißt diese Beziehung:

$$\frac{\overline{U}_{i+1}'}{\overline{U}_i'} - \frac{\overline{U}_i'}{\overline{U}_{i+1}'} = \text{const} \quad \ldots \ldots \quad (15).$$

Wenn man den Unterschied zwischen $\overline{U}_i'$ und $\overline{U}_{i+1}'$ hinreichend klein annimmt, um zu schreiben: $\overline{U}_{i+1}' = \overline{U}_i' + L \cdot \overline{U}_i''$, so ist dies identisch mit:

$$\frac{L\,\overline{U}''}{\overline{U}'} = \text{const} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

und das ist eben die fragliche Beziehung (4b).

Es bleibt noch übrig, sich die Bedeutung der oben geforderten Proportionalität zwischen L_i und $\lambda_i = \frac{\pi}{a_i}$ klarzumachen. Ein bestimmtes Verhältnis (vom numerischen Wert 0,281) zwischen den entsprechenden Größen wird in der Kármánschen Wirbelstraßentheorie als dynamische Stabilitätsbedingung abgeleitet. Da dies aber im Grunde nur eine Dimensionsbeziehung ist, so erscheint es natürlich, daß die hier geforderte statistische Stabilitätstheorie ebenfalls zu einem solchen bestimmten Verhältnis führt. Damit lassen sich dann in der benutzten Näherung alle Folgerungen, die Kármán aus der Ähnlichkeitshypothese zieht, aus dieser statistischen Stabilitätsauffassung ableiten, und die Hypothese selbst wird somit entbehrlich. Eine genauere Durchführung der Theorie müßte sich nicht auf den gegenseitigen Einfluß nur benachbarter Reihen beschränken, sondern darüber hinausgreifen, auch den Ansatz der Gl. (14) etwas weiter verfeinern. Vermutlich würde das aber im Schlußresultat nur geringe Modifikationen hervorrufen. Vielmehr glaube ich, daß der oben skizzierte Ansatz wenigstens die wesentlichen Züge enthält, die bei dieser Form der statistischen Behandlung des Turbulenzproblems von Bedeutung sind[8]).

Zusammenfassung: Die Kármánsche Ähnlichkeitshypothese in der Turbulenztheorie wird als eine statistische Übertragung der Wirbelstraßentheorie des nämlichen Verfassers gedeutet.

144

Abbildungstheoretische Grundlagen für das Problem des Tragflügels in Erdbodennähe.

Von *Wilhelm Müller* in Prag.

Für viele hydrodynamische und elastische Randwertaufgaben ist die Kenntnis eines Potentials erforderlich, das längs zweier geschlossener Konturen konstante Werte annimmt. Zur Konstruktion dieses Potentials geht man am besten wie bei einer einzigen Kontur von dem von zwei Kreisen begrenzten Potentialfeld aus und wendet nachträglich eine konforme Abbildung an, die das Feld auf allgemeinere Grenzkonturen zu übertragen gestattet. Zu den Problemen dieser Art gehören insbesondere die Aerodynamik des Doppeldeckers und des Tragflügels in Erdbodennähe. Wir wollen insbesondere einige abbildungsgeometrische Grundlagen besprechen, die für die Behandlung des letzteren Problems nützlich sein können.

[8]) Von anderen Formen des statistischen Ansatzes sind zu nennen: Th. v. Kármán. Verh. d. 1. Intern. Kongr. f. Techn. Mechanik. Delft 1924, S. 97. — M. Burgers, Akad. d. Wiss. Amsterdam. Verhandl. I. Sekt. XIII, 3. 1924. Ebenda: Proceedings XXVI, 1924 (Besprechung in ZAMM. 4, 522), und 3 weitere Arbeiten ebenda Proceedings XXXII, 1929.

1. Die abbildende Funktion. Lage der Nullstellen. Um das Außengebiet zweier Kreiszylinder K und K' der ζ-Ebene auf die Umgebung zweier in bezug auf die x-Achse symmetrisch gelegener geschlossener Konturen der z-Ebene abzubilden, kann man eine Funktion von der Form

$$z = \zeta + \frac{p^2}{\zeta + \zeta_0} + \frac{p^2}{\zeta + \bar{\zeta}_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

verwenden, in der p eine positive reelle Größe kleiner als der Radius der beiden Grundkreise und $\zeta_0 = \xi_0 + i\,\eta_0$ und $\bar{\zeta}_0 = \xi_0 - i\,\eta_0$ zwei konjugiert komplexe Vektoren bedeuten, über deren Größe noch bestimmte Aussagen zu machen sein werden[1]. In der Tat werden durch (1) zwei symmetrisch zur x-Achse gelegene Punkte der ζ-Ebene in zwei symmetrisch gelegene Punkte der z-Ebene, insbesondere also die reellen Achsen beider Ebenen ineinander übergeführt. Die Kreise verwandeln sich also jedenfalls in zwei symmetrisch gelegene Grenzen, und es genügt daher, sich auf die Betrachtung der Bildkurve eines der Kreise, etwa K im Gebiet der positiven ζ-Ebene zu beschränken. Damit die Abbildung außerhalb der Kreise schlicht ausfällt, ist es notwendig, wenn auch noch nicht hinreichend, daß die Nullstellen der Ableitung

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{[(\zeta+\xi_0)^2+\eta_0^2]^2 - 2p^2[(\zeta+\xi_0)^2-\eta_0^2]}{[(\zeta+\xi_0)^2+\eta_0^2]^2}$$

entweder ins Innere oder auf den Umfang der Kreise fallen. Wenn wir $\zeta + \xi_0 = \zeta'$ setzen, so ergibt sich für die Nullstellen

$$\zeta'^2 = -(\eta_0^2 - p^2) + i\,p\sqrt{4\,\eta_0^2 - p^2} \quad . \; (2).$$

Bezeichnen wir den Abstand der Kreismittelpunkte mit b, so können wir voraussetzen, daß $\xi_0 < a$; $a + b > \eta_0 > b - a$ wird (vgl. Abb. 1).

Abb. 1

Ist im besonderen $\eta_0 > p$, so ergeben sich die Nullstellen aus

$$\eta'^2 - \xi'^2 = \eta_0^2 - p^2 \quad \ldots \ldots \; (3),$$

$$\xi'\,\eta' = \frac{1}{2}\,p\sqrt{4\,\eta_0^2 - p^2} \quad \ldots \ldots \; (4),$$

d. h. als Schnittpunkte zweier gleichseitiger Hyperbeln. Die Hyperbel (3) geht durch die Punkte $\eta' = \pm\,\eta_0$, $\xi' = \pm\,p$ und hat die Winkelhalbierenden der Achsen zu Asymptoten, die Hyperbel (4) hat die Achsen zu Asymptoten und geht durch die Punkte $\zeta' = \pm\,p \pm \eta_0 \sqrt{1 - \frac{p^2}{4\,\eta_0^2}}$.
Ist $p < \eta_0$, so sieht man, daß die Schnittpunkte, etwa auf der oberen Hälfte der ζ-Ebene innerhalb des um den Punkt $\zeta = -\xi_0 + i\,\eta_0$ (in der Figur O) mit dem Radius p beschriebenen Kreises K_p und zwar in die Nähe des Umfangs fallen. Die Ausrechnung der Koordinaten ergibt mit $p = \eta_0 \cdot \lambda\,(\lambda < 1)$

$$\eta'^2 = \frac{1}{2}\,\eta_0^2\,(1 - \lambda^2 + \sqrt{1 + 2\,\lambda^2}) = \eta_0^2\left(1 - \frac{1}{4}\,\lambda^4 + \ldots\right) < \eta_0^2$$

$$\xi'^2 = \eta'^2 - \eta_0^2 + p^2 = p^2\left(1 - \frac{1}{4}\,\lambda^2 + \ldots\right) < p^2$$

$$\xi'^2 + (\eta' - \eta_0)^2 < p^2 .$$

Die notwendige Bedingung für die Schlichtheit der Abbildung ist also jedenfalls erfüllt, wenn etwa der Grundkreis K den Kreis K_p umschließt, was durch die Relation

$$a^2 \geq p + \sqrt{\xi_0^2 + (b - \eta_0)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

ausdrückbar ist.

[1] Vgl. das Referat von St. Bergmann, Z. f. angew. Math. und Mech., Bd. 9 (1929), S. 243, über die Arbeit von J. Bonder, Warschauer Polyt. Gesellsch., Sitzungsberichte und Abhandlungen, Bd. IV, 1 (1925), S. 1—80.

2. Konstruktion der Bildkurven der Kreise. Um die Transformation (1) geometrisch zu veranschaulichen, ist es zweckmäßig, sie in folgender Weise unter Einführung von Zwischenvariablen zu zerlegen

$$z_1 = \zeta + \frac{p^2}{\zeta + \xi_0 - i\eta_0} = \zeta + \zeta_1, \zeta_2 = \frac{p^2}{\zeta + \xi_0 + i\eta_0}, z = \zeta + \zeta_1 + \zeta_2 = z_1 + \zeta_2 \quad \ldots \ldots \text{(1a)}.$$

Wenn der Punkt ζ einen der beiden Grundkreise, etwa K, beschreibt, so erfüllen die Punkte ζ_1 und ζ_2, die aus K durch zwei Transformationen durch reziproke Radien hervorgehen, zwei weitere Kreise, K_1 und $(K)_2$, die man in bekannter Weise konstruieren kann mit Verwendung der beiden durch die Punkte O_1 $(\zeta = -\xi_0 + i\eta_0)$ und O_2 $(\zeta = -\xi_0 - i\eta_0)$ gezogenen, dem ursprünglichen parallelen Bezugsysteme. Die Zusammensetzung entsprechender Ortsvektoren der Kreise K und K_1 führt unter den angegebenen Bedingungen zu einer geschlossenen Kurve C_1. Durch die von O_2 aus gezählten Ortsvektoren von $(K)_2$ verwandelt sich C in die endgültige Profilkurve C_2, die sich übrigens entsprechend der Kleinheit des Kreises $(K)_2$, den wir kurz den Verschiebungskreis nennen wollen, um so weniger von C_1 unterscheidet, je geringer der Wert des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ ist.

Die Konstruktion gestaltet sich verhältnismäßig einfach, wenn die der ersten Transformation $z_1 = \zeta + \zeta_1$ entsprechende Kontur sich auf eine doppelt gezählte gerade Strecke oder eine Kurve 2. Ordnung reduziert.

3. Der symmetrische Fall $\xi_0 = 0$. Wenn wir für die Punkte des Kreises K setzen

$$\zeta = i\,b + a\,e^{i\varphi},$$

so lassen sich die Gleichungen der transformierten Kurven in Parameterform leicht angeben. Wegen der Einfachheit der Rechnung wollen wir auf die Wiedergabe der Koordinatenausdrücke verzichten. Fallen etwa die beiden Punkte $\eta_0 \pm p$ auf den Kreis K, was der Bedingung

$$p^2 = a^2 - (b - \eta_0)^2$$

entspricht, so erhält man durch die erste Transformation einen kreisbogenförmigen Schlitz, der die Punkte $\eta_0 \pm 2p$ miteinander verbindet (vgl. Abb. 2). Durch Hinzufügung der Ortsvektoren des Verschiebungskreises verwandelt sich dieser Schlitz in ein Profil, das mit großer Annäherung als Querschnitt einer kreisförmig gekrümmten, an beiden Enden abgerundeten Platte von geringer Dicke aufgefaßt werden kann. Man bestätigt ohne weiteres, daß der Verschiebungskreis in bezug auf das System durch O sich durch die Gleichung darstellen läßt

$$x^2 + \left(y + \frac{p^2(b+\eta_0)}{(b+\eta_0)^2 - a^2}\right)^2 = \left(\frac{p^2 a}{(b+\eta_0)^2 - a^2}\right)^2 \quad \ldots \ldots \text{(6)}$$

und daß die größte Dicke des Profils in der Mitte dem Durchmesser des Kreises gleich ist. In der Abbildung ist der Fall $a = 4$, $b = 8$ $\left(\frac{a}{b} = 0{,}5\right)$, $\eta_0 = 7$, $p^2 = 15$ gezeichnet. Dann ergeben sich für die Verhältnisse der Dicke und der mittleren Höhe des Profils zum Abstand der Endkanten die Werte 0,036 und 0,13.

Um die genauere Bedingung dafür zu erhalten, daß die mittlere Krümmung der Platte verschwinde, berechnet man die Ordinaten für die Winkelargumente $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ und setzt den Mittelwert gleich der für $\varphi = 0$ geltenden Ordinate. Man erhält aus

$$y_{\frac{\pi}{2}} = b + a - \frac{2p^2(b+a)}{(b+a)^2 - \eta_0^2};\; y_{-\frac{\pi}{2}} = b - a - \frac{2p^2(b-a)}{(b-a)^2 - \eta_0^2}$$

$$y_0 = b\left[1 - \frac{2p^2(b^2 + a^2 - \eta_0^2)}{(b^2 + a^2 + \eta_0^2)^2 - 4b^2\eta_0^2}\right]$$

die Bestimmungsgleichung für η_0

$$3\eta_0^4 - 2\eta_0^2 b^2 - (b^4 - a^4) = 0,$$

aus der sich mit $\nu = \frac{a}{b}$ ergibt

$$\eta_0^2 = \frac{1}{3}b^2 + \frac{2}{3}b^2\sqrt{1 - \frac{3}{4}\nu^4} \sim b^2\left(1 - \frac{1}{4}\nu^4\right).$$

Man sieht also, daß der entsprechende Wert von η_0 für $r=\frac{a}{b}<1$ sich nur wenig von b unterscheidet. In dem oben eingeführten Beispiel ($a=4, b=8$) ergibt sich z. B. $\eta_0=7{,}93$.

Wenn man daher, um eine Annäherung an den Fall verschwindender mittlerer Krümmung zu erhalten, $\eta_0=b$, also $a=p$ setzt, so geht der Kreisbogen C_1 in die gerade, die Punkte $i'b \pm 2a$ verbindende Strecke über. Für die schließlich gewonnene Bildkurve des Kreises K gewinnt man nach Elimination von φ die geschlossene Gleichung

$$x^2=\left(\frac{3(4b^2-a^2)-4by}{4b^2-a^2-4by}\right)^2\left(\frac{(2b-a)(b+a)}{2b+a}-y\right)\left(y-\frac{(2b+a)(b-a)}{2b-a}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7),$$

aus der man erkennt, daß die Kurve in dem verhältnismäßig schmalen Streifen zwischen $y=\frac{(2b-a)(b+a)}{2b+a}$ und $y=\frac{(2b+a)(b-a)}{2b-a}$ eingeschlossen ist (Abb. 3).

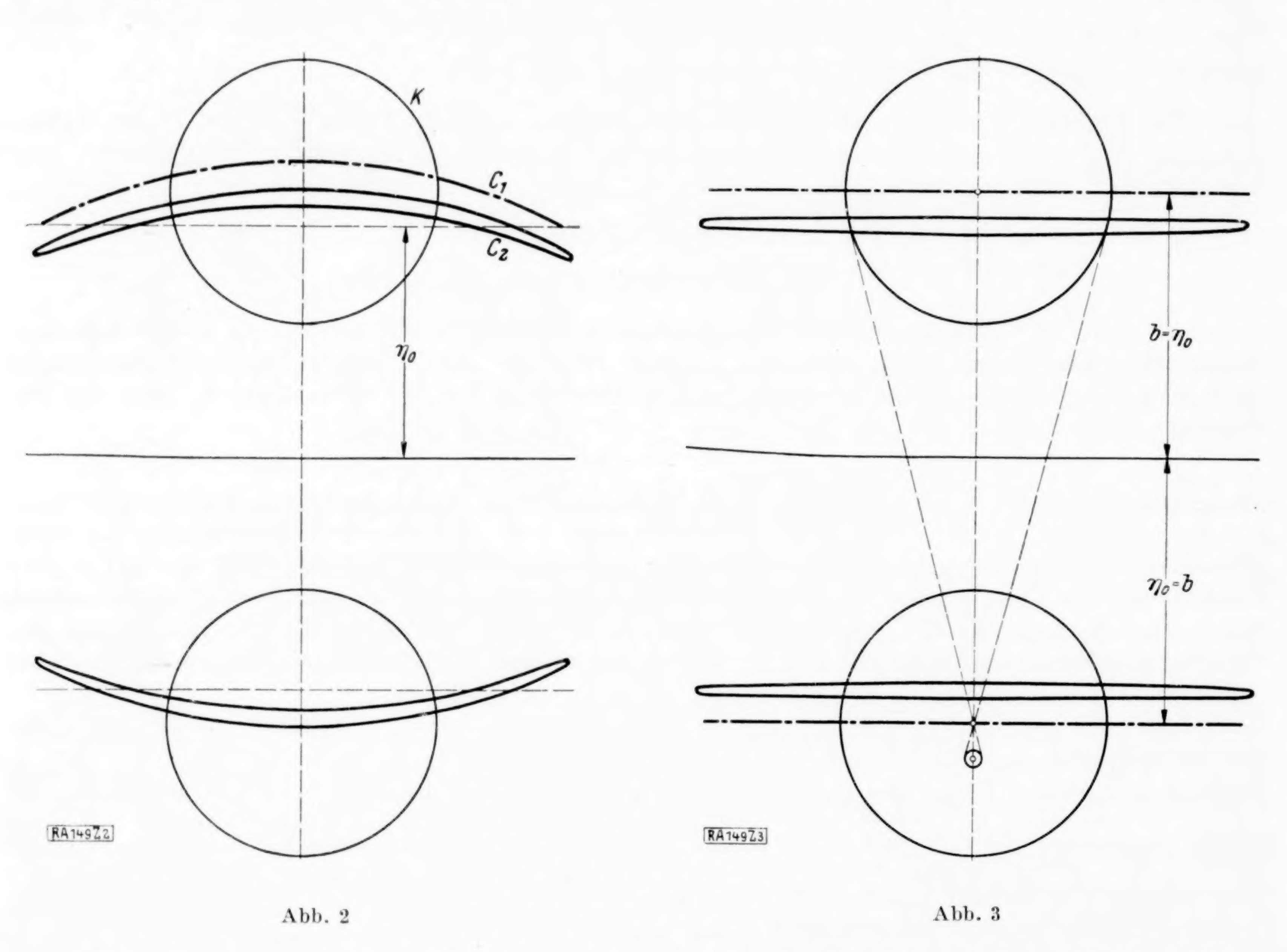


Abb. 2 Abb. 3

Wenn p von a verschieden ist, aber $\eta_0=b$ bleibt, so ergibt sich als Kurve C_1 eine Ellipse mit den Halbachsen $a+\frac{p^2}{a}$ und $a-\frac{p^2}{a}$. Durch die zweite Transformation wird die Ellipse verschoben und gleichzeitig verzerrt, und zwar werden sich die Abmessungen der neuen ellipsenartigen Kurve gegenüber der Ellipse in der Weise ändern, daß die Länge und Breite um den Durchmesser des Verschiebungskreises vergrößert werden. Wenn das Verhältnis $r=\frac{a}{b}$ genügend klein ist, wird auch die Kurve C_2 nicht viel von einer Ellipse verschieden sein. Um allgemein eine möglichst günstige Annäherung an die Ellipse zu erhalten, können wir etwa die Bedingung dafür aufsuchen, daß die Krümmungen in den auf der y-Achse gelegenen Scheitelpunkten $\left(\varphi=\pm\frac{\pi}{2}\right)$ einander gleich werden. Da in diesen Punkten $\frac{dy}{dx}$ verschwindet, so würde die Bedingung dahin lauten, daß die Absolutwerte der zweiten Ableitung

$$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}\right)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}\right):\frac{dx}{d\varphi}$$

für die Argumente $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ übereinstimmen. Das nach einer etwas umständlichen Rechnung gewonnene Resultat lautet

$$\left.\begin{aligned}&(b^2-a^2)^5+\eta_0^2(b^2-a^2)^3(a^2+7b^2)-2\eta_0^4(b^2-a^2)(7a^4+11b^4+6a^2b^2)\\&-2\eta_0^6(13a^4+2ab^2-7b^4)+\eta_0^8(5b^2+19a^2)-5\eta_0^{10}\\&-2p^2[(b^2-a^2)^4+4\eta_0^2(b^2-a^2)^2(b^2+a^2)+2\eta_0^4(11b^4+2a^2b^2-5a^4)\\&-4\eta_0^6(7b^2-a^2)+\eta_0^8]+16p^4\eta_0^4(\eta_0^2-b^2+a^2)=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8).$$

Diese Gleichung erscheint für den allgemeinen Fall ziemlich umständlich. Sie läßt aber, wenn $\frac{a}{b}$ ein gangbarer echter Bruch ist, etwa $\lesseqgtr \frac{1}{2}$, eine einfache, bereits oben angedeutete Abschätzung der Größe von η_0 zu, die für praktische Aufgaben durchaus ausreichend ist.

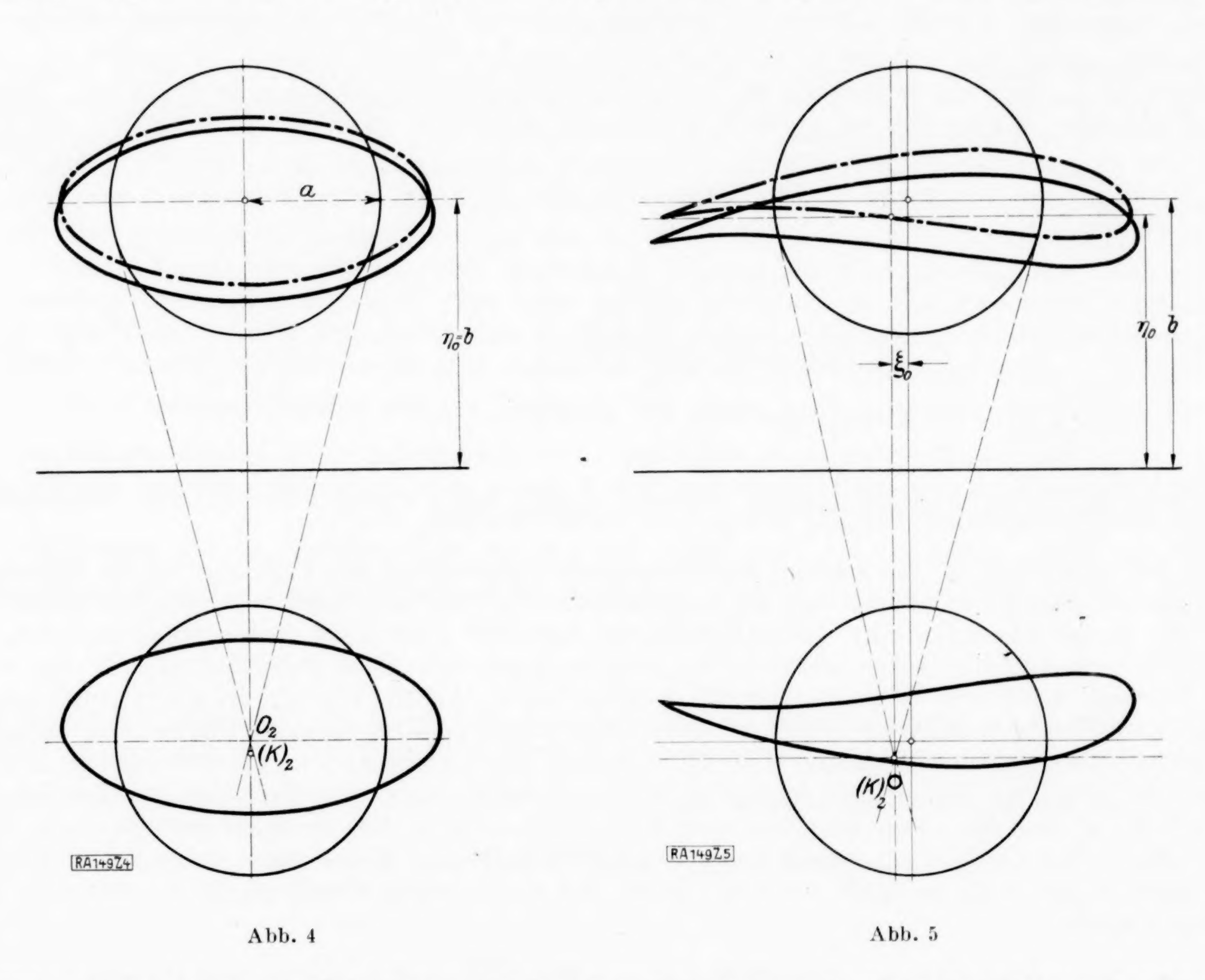


Abb. 4 Abb. 5

Setzt man nämlich $\eta_0^2 = b^2(1-\varepsilon)$, $\eta_0^4 = b^4(1-2\varepsilon)$ usw., ferner $a^2 = \lambda^2 b^2$, $p^2 = \nu^2 b^2$ und vernachlässigt die höheren Potenzen der kleinen Größen $\lambda, \nu, \varepsilon$, so ergibt sich aus (8) die Bestimmungsgleichung für ε

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2 \nu^2}{4(\lambda+\nu)}.$$

Die Größe ε ist also jedenfalls eine kleine Größe, die man mit demselben Recht vernachlässigen kann wie die dritten Potenzen von λ und ν. Es ist damit also bestätigt, daß die Krümmungsverhältnisse der Bildkurve des Grundkreises K im Falle $\eta_0 = b$ nicht wesentlich von denen der Ellipse abweichen, wenn nur die Verhältnisse $\frac{p}{a}$, $\frac{b}{a}$ genügend kleine echte Brüche sind. Dasselbe zeigt die Abb. 4, die sich auf die Werte $a=4$, $b=8=\eta_0$ bezieht.

Eine besonders einfache Gestalt nimmt die Bedingungsgleichung für den Fall an, daß die beiden Grundkreise sich berühren, daß also $a=b$ wird. Da man in diesem Fall den Faktor $\eta_0^2 + 2p^2$ herausheben kann, so erhält man die Beziehung

$$5\eta_0^4 - 24a^2\eta_0^2 - 8p^2\eta_0^2 + 16a^4 = 0 \quad \ldots\ldots (9)$$

4. Zusammenhang mit der Tragflügeltheorie. Wenn ξ_0 von Null verschieden ist, so erhalten die Konturen eine in bezug auf die y-Achse unsymmetrische Gestalt. Wenn im besonderen der Punkt $-\xi_0-p+i\eta_0$ auf dem Kreise K (resp. $-\xi_0-p-i\eta_0$ auf dem Kreise K') liegt, so erhält man als Kurve C_1 ein Joukowskysches Profil, dessen Spitze (Hinterkante) in den Punkt $-\xi_0-2p+i\eta_0$ fällt. Die Verschiebung der Punkte durch die Ortsvektoren der entsprechenden Punkte des Verschiebungskreises wird die Längs- und Querabmessungen des Profils wieder um den Durchmesser von $(K)_2$ vergrößern. Ferner wird nach früherem das Profil selbst im Mittel eine Verschiebung um die Strecke

$$\frac{p^2(b+\eta_0)}{(b+\eta_0^2)-a^2} \sim \frac{p^2}{2b}$$

gegen die Mittelebene erfahren. Dabei wird zwar streng genommen in dem transformierten Profil keine Spitze mehr auftreten, der Nullpunkt von $\frac{dz}{d\zeta}$ wird aber, wenn man sich an die in der Praxis üblichen Profilformen hält, für welche $b-\eta_0$ und ξ_0 kleine Größen sind, der Peripherie des Kreises K so nahe liegen, daß auch der Krümmungsradius in dem der Spitze entsprechenden Punkt des Profils C_2 sehr klein ausfällt (vgl. Abb. 5). Eine wirkliche Spitze entsteht dagegen, wenn die beiden im 1. Abschnitt betrachteten gleichseitigen Hyperbeln und der Kreis K sich in einem Punkte schneiden. Die Bedingung dafür ist durch das System von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \eta^2-(\xi+\xi_0)^2 &= \eta_0^2-p^2 \\ (\xi+\xi_0)\,\eta_0 &= p\sqrt{\eta_0^2-\frac{1}{4}p^2} \\ \xi^2+(\eta-b)^2 &= a^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

dargestellt, aus dem sich nach Elimination von ξ und η eine Beziehung zwischen den für das Profil charakteristischen Größen a, b, ξ_0, η_0, p herleiten läßt.

Die Grundlage für die weitere aerodynamische Behandlung des Problems ist die Kenntnis des allgemeinen Stromfeldes, das im Außengebiet der beiden Grundkreise singularitätenfrei ist, im Unendlichen in eine Parallelströmung übergeht und zwei entgegengesetzt gleiche Zirkulationen um die Kreise besitzt. Das entsprechende komplexe Potential ist z. B. der von St. Bergmann[2]) und vom Verfasser[3]) besprochenen Arbeit von J. Bonder und einer neueren Arbeit von M. Lagally[4]) zu entnehmen, die eine sehr elegante Darstellung mittelst elliptischer Funktionen enthält. Die Anwendung der besprochenen Transformation liefert dann die zyklische Potentialströmung in der Umgebung eines unendlich langen Tragflügels in der Nähe des als eben anzusehenden Erdbodens. Dabei ist zunächst angenommen, daß die Längsachse des Flügels parallel der Erdoberfläche liegt. Wenn man einen Anstellwinkel berücksichtigen will, so muß man an Stelle der abbildenden Funktion (1) die folgende zugrunde legen

$$z=\zeta+\frac{p^2 e^{2i\gamma}}{\zeta+\xi_0-i\eta_0}+\frac{p^2 e^{-2i\gamma}}{\zeta+\xi_0+i\eta_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Die Ermittlung der Kräfte führt zu einem mit der Erfahrung insofern nicht zusammenstimmenden Resultat, als die Auftriebskraft gegenüber dem freien Flug verkleinert wird, während in Wirklichkeit besonders unter der Einwirkung der Bodenreibung der Unterschied der Geschwindigkeit auf beiden Flügelseiten und dementsprechend auch die Kraftwirkung vergrößert erscheint. Um die Verhältnisse der Wirklichkeit anzupassen, wäre es erforderlich, sowohl den Einfluß der Wirbelschleppe hinter dem bewegten Flügel als auch die Vorgänge in der dem Boden aufliegenden Reibungsschicht genauer in Rechnung zu setzen. 149

[2]) a. a. O.
[3]) Wilh. Müller, Z. für ang. Math. u. Mech. Bd. 9 (1929), S. 200.
[4]) M. Lagally, Die reibungslose Strömung im Außengebiet zweier Kreise, Z. für ang. Math. u. Mech. Bd. 9 (1929), S. 299 bis 305.

Die voraussichtliche Bevölkerungsentwicklung in Deutschland.

Von *F. Bonz* und *F. Hilburg.*

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.)

Der in den letzten Jahren erhebliche Geburtenrückgang in Deutschland hat viel Aufmerksamkeit auf Seite der Statistiker gefunden. Viele, die diesen Geburtenrückgang diskutierten und seine voraussichtlichen Wirkungen in bevölkerungs- und wirtschaftspolitischer Hinsicht untersuchten, kamen zu dem pessimistischen Schluß, daß das deutsche Volk aufgehört habe, ein „wachsendes Volk“ zu sein, und sich dem allmählichen Aussterben nähere[1]). Die Aufgabe unserer Betrachtung soll darin bestehen zu untersuchen, wieweit diese Behauptungen in den nachweisbaren statistischen Daten begründet sind. Hierbei werden wir einen Satz über den asymptotischen Verlauf der Bevölkerungsentwicklung eines Landes ableiten, der offenbar den üblichen Untersuchungen zugrunde liegt, ohne bisher klar formuliert oder gar bewiesen worden zu sein. Wenn die Absterbeordnung einer Bevölkerung konstant gegeben ist, so läßt sich, wie wir zeigen werden, ein bestimmter Wert des weiblichen „Geburtenindex“ $\varkappa_w$ berechnen, für den die Bevölkerungszahlen im Grenzwert stationär sind, während sie für größere bzw. kleinere Werte von $\varkappa_w$ asymptotisch wie eine geometrische Reihe zu- bzw. abnehmen.

1. Vorausberechnung bis zum Jahre 1945. Jede Voraussage über die zukünftige Entwicklung einer statistischen Gesamtheit muß sich auf die Voraussetzung des Konstantbleibens gewisser Faktoren stützen; der Rechnung, die wir zunächst durchführen, liegen zwei Annahmen dieser Art zugrunde. Die eine betrifft die Konstanz der Absterbeordnung, d. h. der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Mensch einer bestimmten Altersklasse die nächstfolgende erreicht; die zweite ist eine Annahme über die Geburtenhäufigkeit.

Die Wahrscheinlichkeit eines x-Jährigen, das Alter $x+1$ zu erreichen, wollen wir mit η_x bezeichnen, wobei x die Lebensalter 0 bis etwa 100 durchläuft. Bezeichnet $\overset{t}{z}_x$ die Anzahl derjenigen, die im Jahre $1925+t$ im $x$ten Lebensjahr stehen, so ist die erwartungsmäßige Anzahl derer, die im nächsten Jahr um ein Jahr älter sind, $\overset{t+1}{z}_{x+1}$ gleich $\overset{t}{z}_x$ mal der Wahrscheinlichkeit dafür, dieses nächste Jahr zu erleben oder:

$$\overset{t+1}{z}_{x+1} = \eta_x \cdot \overset{t}{z}_x \qquad \begin{pmatrix} x = 0, 1, 2, \ldots . 100 \\ t = 0, 1, 2, \ldots\ldots \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

In dieser Schreibweise liegt bereits die Annahme, daß η_x, also die Sterbenswahrscheinlichkeit, von t unabhängig ist. Im folgenden wird es notwendig sein, Männer und Frauen getrennt zu behandeln. Sind $\eta_{m,x}$ und $\eta_{w,x}$ die beiden Überlebenswahrscheinlichkeiten und $\overset{t}{u}_x$ bzw. $\overset{t}{v}_x$ die Zahlen der lebenden Männer bzw. Frauen, so gilt analog (1)

$$\overset{t+1}{u}_{x+1} = \eta_{m,x} \cdot \overset{t}{u}_x; \qquad \overset{t+1}{v}_{x+t} = \eta_{w,x} \cdot \overset{t}{v}_x \quad \ldots\ldots\ldots (1').$$

Außer (1) bzw. (1′) braucht man noch eine Annahme über die Geburten, d. h. über die $\overset{t}{z}_0$ bzw. $\overset{t}{u}_0$, $\overset{t}{v}_0$, die Anfangswerte der Rekursion (1) bzw. (1′). Als Geburtenindex $\varkappa$ bezeichnen wir den Quotienten der sämtlichen Geburten eines bestimmten Jahres durch die Anzahl der im vorangehenden Jahr lebenden gebärfähigen Frauen, die man etwa durch Addition der den Altersklassen von 15 bis 45 Jahren angehörenden Frauen erhält. Unsere zweite Annahme geht dahin, daß dieser Geburtenindex zunächst als konstant angesehen werden darf. Man erhält mit Hilfe dieses $\varkappa$-Wertes die $\overset{t}{z}_0$ in der Form:

$$\overset{t+1}{z}_0 = \varkappa \cdot \left[\overset{t}{v}_{15} + \overset{t}{v}_{16} + \ldots\ldots + \overset{t}{v}_{45}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Trennt man die Geborenen nach dem Geschlecht, indem man einen männlichen und einen weiblichen Geburtenindex $\varkappa_m$ bzw. $\varkappa_w$ einführt, so stehen diese Größen mit der früher erklärten Zahl $\varkappa$ in der Beziehung:

$$\varkappa = \varkappa_m + \varkappa_w .$$

[1]) Fr. Burgdörfer, Der Geburtenrückgang und seine Bekämpfung. Berlin 1925. — Die Wirtschaftskurve mit Indexzahlen der Frankfurter Zeitung. 9. Jahrgang, Heft 1 (1930). — Beiträge zum deutschen Bevölkerungsproblem. Bearb. im Statist. Reichsamt. Berlin 1929. (Wirtschaft und Statistik. Sonderheft Nr. 5, S. 5—37.)

Das Verhältnis $\frac{\varkappa_w}{\varkappa_m}$ ist das bekannte Geschlechtsverhältnis der Geborenen, das erfahrungsgemäß etwa 0,942 beträgt. An Stelle von (2) tritt jetzt:

$$\left.\begin{aligned} \overset{t+1}{u}_0 &= \varkappa_m \cdot \left[\overset{t}{v}_{15} + \overset{t}{v}_{16} + \ldots\ldots + \overset{t}{v}_{45}\right] \\ \overset{t+1}{v}_0 &= \varkappa_w \cdot \left[\overset{t}{v}_{15} + \overset{t}{v}_{16} + \ldots\ldots + \overset{t}{v}_{45}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2').$$

Die Gesamtzahl der Männer bzw. der Frauen im Jahre 1925 + t ergibt sich zu:

$$\left.\begin{aligned} \overset{t}{u} &= \overset{t}{u}_0 + \overset{t}{u}_1 + \overset{t}{u}_2 + \ldots\ldots + \overset{t}{u}_{100} \\ \overset{t}{v} &= \overset{t}{v}_0 + \overset{t}{v}_1 + \overset{t}{v}_2 + \ldots\ldots + \overset{t}{v}_{100} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Die Gl. (1′), (2′) und (3) gestatten, die Bevölkerungszahl in irgendeinem späteren Jahr zu berechnen, wenn neben den $\eta_{m,x}$, $\eta_{w,x}$, $\varkappa_m$ und $\varkappa_w$ alle u_x und v_x für irgend ein Jahr gegeben sind.

Die folgende Rechnung benutzt als Ausgangswerte $\overset{0}{u}_x$, $\overset{0}{v}_x$ die Zahlen der Volkszählung aus dem Jahre 1925[2]). Die Geburtenzahlen $\varkappa_m$ und $\varkappa_w$ sind durch Division der Anzahlen der im Jahre 1926 geborenen Knaben bzw. Mädchen durch die Zahlen der 15- bis 45-jährigen Frauen von 1925 gefunden[3]). Die $\eta_{m,x}$ und $\eta_{w,x}$ sind entnommen der (ausgeglichenen) „Allgemeinen Deutschen Sterbetafel für die Jahre 1924 bis 1926"[4]).

Im folgenden geben wir die Schlußergebnisse, die sich auf den Zeitraum von 1925 bis 1945 erstrecken, wieder:

Jahre	Männer	Frauen	Gesamt-bevölkerung
	Millionen	Millionen	Millionen
1925	30,20	32,21	62,41
1926	30,47	32,45	62,92
1927	30,74	32,68	63,42
1928	31,00	32,92	63,92
1929	31,26	33,15	64,41
1930	31,52	33,37	64,89
1931	31,78	33,60	65,38
1932	32,02	33,81	65,83
1933	32,26	34,01	66,27
1934	32,47	34,19	66,66
1935	32,68	34,37	67,05
1936	32,88	34,56	67,44
1937	33,08	34,70	67,78
1938	33,27	34,87	68,14
1939	33,46	35,02	68,48
1940	33,64	35,17	68,81
1941	33,81	35,31	69,12
1942	33,97	35,44	69,41
1943	34,13	35,56	69,69
1944	34,27	35,67	69,94
1945	34,41	35,78	70,19

Wie man aus dieser Zahlenreihe und der sie darstellenden Abb. 1 ersieht, wäre im Laufe der nächsten 15 Jahre noch mit einer Zunahme der deutschen Bevölkerung zu rechnen. Wie sich die Zunahme auf die einzelnen Altersklassen verteilt, läßt Abb. 2 erkennen, die das Ergebnis unserer Rechnung für das Jahr 1945 vollständig wiedergibt. Auf der Vertikalen

[2]) Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich. Berlin 1928, S. 16.
[3]) Ebenda S. 31 bzw. S. 16.
[4]) Ebenda S. 38/39.

sind in der üblichen Weise die Altersjahrgänge, nach links bzw. rechts die Anzahlen u_x bzw. v_x und zwar für die Jahre 1925 und 1945 aufgetragen. Wie man sieht, beruht der Anstieg in der Hauptsache auf einer Zunahme der hohen Altersklassen. Dagegen kann in dem betrachteten Zeitraum von einer Zunahme der jüngeren Jahrgänge überhaupt nicht die Rede sein. Den Verlauf der Geburtenzahlen gemäß unserer Rechnung bringt die Abb. 3 zur Darstellung. Es ist zunächst bis zum Jahre 1931 ein Anstieg zu verzeichnen. Dann aber macht sich der Geburtenausfall der Kriegsjahre bemerkbar; denn von 1931 ab gehen die schwach besetzten Geburten-Jahrgänge in die Zahl der gebärfähigen Frauen ein. Erst nach 1935 rufen die verhältnismäßig hoch liegenden Geburtenzahlen der Jahre 1920 und 1921 eine Erholung hervor, um dann von etwa 1939 ab allmählich abzusteigen.

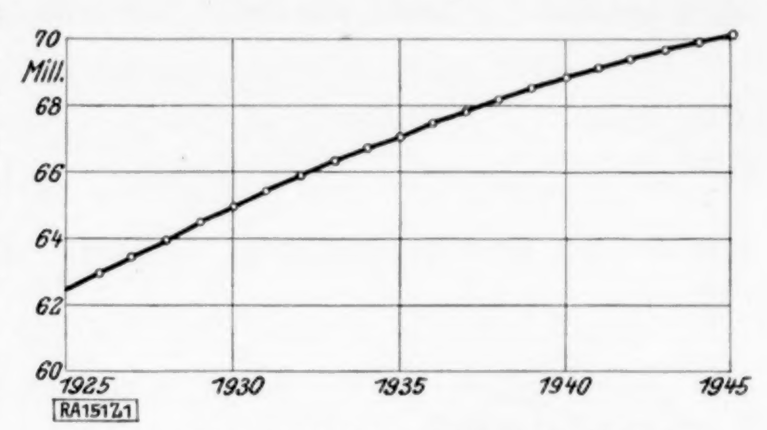


Abb. 1. Voraussichtliche Gesamtbevölkerung bis zum Jahre 1945.

Gegen dieses Resultat könnte man einwenden, daß unsere Voraussetzung hinsichtlich der aus den Zahlen der Jahre 1925/26 berechneten Geburtenindizes $\varkappa$ zu günstig sei, da z. B. im Jahre 1927 nur 1 161 719 Kinder geboren worden sind, während unsere Rechnung für dasselbe Jahr etwa 1,24 Millionen Geburten ergibt. Wir haben daher eine zweite Berechnung nur im Hinblick auf das Jahr 1945 durchgeführt. Bei gleicher Annahme hinsichtlich der Sterblichkeitsverhältnisse wurde die Geburtenzahl von 1927, welche die niedrigste bis nun bekannte Zahl ist[5]), der Berechnung von $\varkappa_m$ und $\varkappa_w$ zugrunde gelegt. Man erhält dann für das Jahr 1945 eine Gesamtbevölkerung von 68,88 Millionen. Das sind für das Jahr 1945 etwa 1,31 Millionen Menschen weniger, als die erste Berechnung ergab. Aber auch dieser Verlauf zeigt von 1944 zu 1945 noch eine Bevölkerungszunahme von etwa 0,16 Millionen Menschen, so daß also mit dieser ungünstigsten Geburtenzahl, die bisher bekannt ist, in dem betrachteten Zeitraum noch keineswegs ein Bevölkerungsschwund festgestellt werden kann.

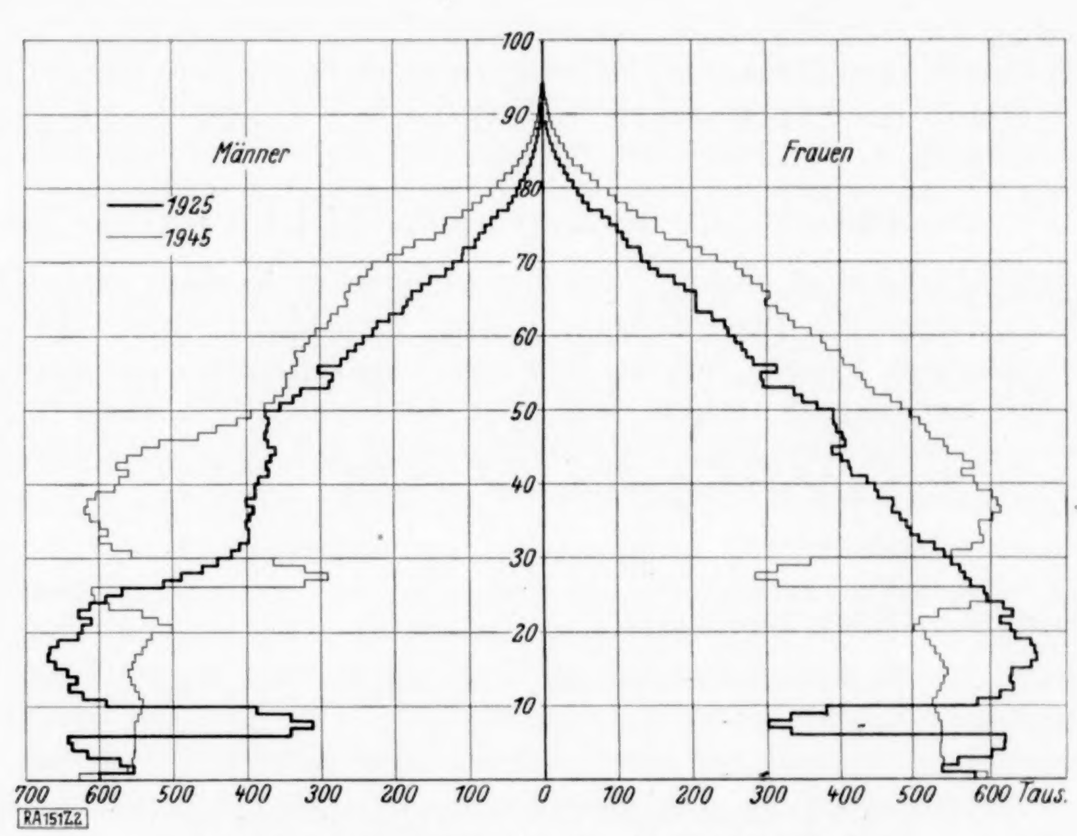


Abb. 2. Altersaufbau für die Jahre 1925 und 1945.

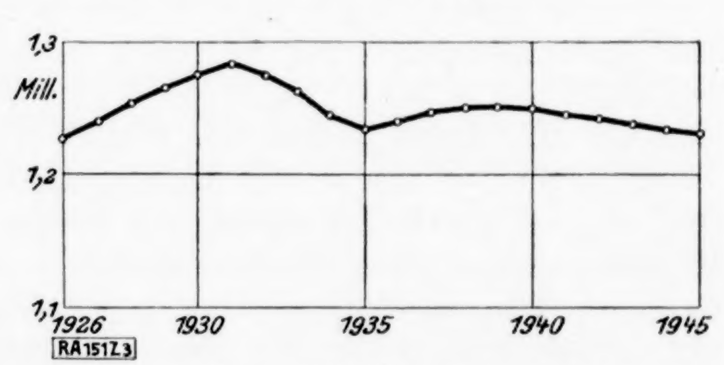


Abb. 3. Voraussichtliche Geburtszahlen bis zum Jahre 1945.

2. Asymptotischer Verlauf der Bevölkerungsentwicklung. Wir haben gesehen, wie man, ausgehend von gewissen Daten (die wir dem Jahre 1925 bzw. 1927 entnahmen), den Bevölkerungsverlauf von Jahr zu Jahr berechnen kann. Wir können aber außerdem, ohne diese Rechnung selbst immer weiterzuführen — und dies soll der Inhalt dieser zweiten Bemerkung sein —, einen Satz beweisen, der uns über die Bevölkerungsentwicklung nach sehr langer Zeit, über ihre Entwicklung „im Limes", Aufschluß gibt.

Ein stationärer Zustand der Bevölkerungsentwicklung ist ein solcher, bei dem die Anzahl z der x-Jährigen von t unabhängig ist, also $\overset{t}{\underset{x}{z}} = \underset{x}{z}$. Für einen solchen Zustand geht Gl. (1) über in:

$$\left.\begin{aligned} z_{x+1} &= \eta_x \cdot z_x \\ \text{oder} \qquad \eta_x &= \frac{z_{x+1}}{z_x} \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

[5]) Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich. Berlin 1930, S. 30/31.

Andererseits ist die „Absterbeordnung“ durch eine monoton abnehmende Funktion $l(x)$ gegeben, die für jedes Alter x die Wahrscheinlichkeit angibt, dieses Alter noch zu erleben, bzw. den Prozentsatz einer bestimmten Menge Geborener, die in diesem Alter noch leben. Die Funktion $l(x)$ steht mit den Überlebenswahrscheinlichkeiten η_x in folgendem Zusammenhang:

$$l_{x+1} = \eta_0 \cdot \eta_1 \cdot \ldots \cdot \eta_x \quad \text{oder} \quad \eta_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad (5).$$

Aus beiden Beziehungen folgt, daß ein stationärer Zustand jedenfalls nur möglich ist, falls

$$z_{x+1} : z_x = l_{x+1} : l_x \qquad (6),$$

also falls die Altersschichtung der Bevölkerung mit der Absterbeordnung übereinstimmt.

Wir wollen nun zeigen: Es gibt einen ganz bestimmten weiblichen Geburtenindex $\varkappa_w = \varkappa_0$, bei dessen Vorhandensein die gesamte Bevölkerungsentwicklung in der Grenze einem stationären Zustand zustrebt, während für solche Geburtenindizes $\varkappa_w$, die größer oder kleiner als $\varkappa_0$ sind, die Bevölkerungszahlen im Limes wie die Glieder einer geometrischen Reihe zu- bzw. abnehmen.

Schreiben wir für die Zeitvariable t jetzt n und für die früher mit $\overset{t}{\underset{0}{u}}$ und $\overset{t}{\underset{0}{v}}$ benannten Anzahlen der im Jahre $1925 + n$ geborenen Knaben und Mädchen jetzt y_n und $\bar{y}_n$, so erhält man nach (2′) diese Zahlen, indem man die Summe der im Jahre $n - 1$ lebenden 15- bis 45-jährigen Frauen mit $\varkappa_m$ bzw. $\varkappa_w$ multipliziert. Die Zahl der Frauen, die im Jahre n im r-ten Lebensjahr stehen, läßt sich aber schreiben als Produkt aus der Anzahl der im Jahre $n - r$ geborenen Mädchen, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit $\bar{l}_r$, die für eine Frau besteht, die dazwischenliegenden r Jahre zu überleben. $\bar{l}_r$ ist also gegeben durch

$$\bar{l}_r = \eta_{w,0} \cdot \eta_{w,1} \cdot \ldots \cdot \eta_{w,r-1} \qquad (7).$$

Aus (2′) erhält man dann:

$$y_n = \varkappa_m \cdot [\bar{l}_{15} \cdot \bar{y}_{n-15} + \bar{l}_{16} \cdot \bar{y}_{n-16} + \ldots + \bar{l}_{45} \cdot \bar{y}_{n-45}] \qquad (8),$$

$$\bar{y}_n = \varkappa_w \cdot [\bar{l}_{15} \cdot \bar{y}_{n-15} + \bar{l}_{16} \cdot \bar{y}_{n-16} + \ldots + \bar{l}_{45} \cdot \bar{y}_{n-45}] \qquad (9).$$

Dies sind simultane Differenzengleichungen für y_n und $\bar{y}_n$. In der zweiten dieser Gleichungen kommt nur $\bar{y}$ als Variable vor, und wir können sie daher für sich allein behandeln.

Wir haben somit eine Differenzengleichung von der Ordnung $k = 45$ zu untersuchen. Die Anfangsbedingungen bestehen in der Angabe von k aufeinanderfolgenden weiblichen Geburtenzahlen $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_k$; aus diesen folgen dann $\bar{y}_{k+1}, \bar{y}_{k+2}, \ldots$ sukzessive durch die Rekursion (9). Diese Rekursion besitzt die besondere Eigenschaft, daß zur Berechnung jedes neuen y-Wertes von den k vorhergehenden Werten nur die ersten $(\mu + 1)$ verwendet werden (bei uns ist $\mu = 30$), während die sodann folgenden $(\nu - 1)$ Werte $(\nu = k - \mu = 15)$ unbenutzt bleiben. Die Anfangswerte setzen wir — ihrer Bedeutung gemäß — als nicht-negativ voraus, d. h. so, daß mindestens einer von den k Anfangswerten > 0, die anderen ≥ 0 sind. Wären alle gleich Null, so besäße die homogene Gl. (9) nur die triviale Lösung $\bar{y}_n = 0$ für alle n. Wir schicken noch voraus, daß, wenn auch nur einer der Anfangswerte $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_k$ positiv ist, von einem gewissen n an — und zwar spätestens von $n = k + \nu$ an — alle $\bar{y}_n$ positiv werden.

Ist nämlich $\bar{y}_m$ für ein zwischen 1 und k gelegenes m von 0 verschieden, werden also im m-ten Jahr unserer Zählung Mädchen geboren, so ist in den Jahren $m + 15$ bis $m + 45$ je ein bestimmter Bruchteil von $\bar{y}_m$ in der Zahl der gebärfähigen Frauen vertreten. Es werden daher in den Jahren $m + 16$ bis $m + 46$ sicher Mädchen geboren, so daß $\bar{y}_{m+16}$ bis $\bar{y}_{m+46}$ von 0 verschieden ist. Für das Jahr $m + 47$ und die folgenden ist dann durch $\bar{y}_{m+31} > 0$ schon gesorgt usf. Allgemein sind die $\bar{y}_m$ vom Jahre $m + \nu$, spätestens also vom Jahre $k + \nu$ an sämtlich größer als Null.

Dies vorausgeschickt, führen wir zur Behandlung von (9) einen noch näher zu bestimmenden positiven Faktor λ ein und setzen

$$\frac{\bar{y}_n}{\lambda^n} = Y_n \qquad (10).$$

Schreibt man ferner der Einfachheit halber

$$\bar{l}_{15} = a_0, \ \bar{l}_{16} = a_1, \ \ldots \bar{l}_{45} = a_{30},$$

so erhält man aus (9)

$$Y_n = \varkappa_w [a_0 \lambda^{-\nu} Y_{n-\nu} + a_1 \lambda^{-\nu-1} Y_{n-\nu-1} + \ldots + a_\mu \lambda^{-k} Y_{n-k}] \quad \ldots \quad (11).$$

Wir wollen λ so bestimmen, daß die Summe der positiven Koeffizienten auf der rechten Seite von (11) gleich Eins ist, d. h. daß

$$\lambda^k = \varkappa_w (a_0 \lambda^\mu + a_1 \lambda^{\mu-1} + \ldots + a_\mu) \quad \ldots \quad (12).$$

Es läßt sich zeigen, daß es zu jedem $\varkappa_w$ ein positives λ gibt, das (12) befriedigt. Denn löst man (12) nach $\varkappa_w$ auf:

$$\varkappa_w = \frac{\lambda^k}{a_0 \lambda^\mu + a_1 \lambda^{\mu-1} + \ldots + a_\mu} \quad \ldots \quad (12'),$$

so erkennt man: für $\lambda = 0$ ist $\varkappa_w = 0$, sodann wächst, wenn λ von 0 bis 1 wächst, $\varkappa_w$ von Null bis

$$\varkappa_0 = \frac{1}{a_0 + a_1 + \ldots + a_\mu} \quad \ldots \quad (13),$$

und wenn schließlich λ von 1 bis ∞ zunimmt, wächst auch $\varkappa_w$ über alle Grenzen. Das Anwachsen von $\varkappa_w$ ist monoton, da der Zähler des Bruches in (12') bei wachsendem λ stets stärker zunimmt als der Nenner. Es gibt somit zu jedem reellen positiven $\varkappa_w$ ein (und nur ein) reelles positives λ, das (12) befriedigt; wir nennen es λ_1 und denken uns $\lambda = \lambda_1$ in (10) und in (11) eingesetzt.

Wir beweisen nun, daß die Folge der durch (11) definierten Y_n gegen einen beschränkten positiven Grenzwert C konvergiert. Ist $\lambda = \lambda_1$ in (11) eingeführt, so ist die Summe der $(\mu + 1)$ nicht-negativen Koeffizienten rechts in (11) gleich Eins. Jedes neue Y_n entsteht daher nach (11) aus $(\mu + 1)$ Y_n-Werten durch Mittelbildung mit verschiedenen Gewichten, liegt somit sicher innerhalb des Intervalls zwischen dem größten und kleinsten der Y_n-Werte, aus denen gemittelt wurde (mit Ausschluß der Grenzen). Vorausgesetzt ist dabei, daß wenigstens zwei Koeffizienten a in (11) wirklich vorkommen, d. h., daß $\mu \geqq 1$. Betrachtet man also irgendeine Folge von k positiven Y_n-Werten (und von $n = k + \nu$ an sind sicher alle Y_n positiv), so bestimmt der größte und kleinste unter ihnen ein positives Intervall, und jeder Y_n-Wert mit größerem Index als der letzte der betrachteten Folge liegt innerhalb dieses Intervalls. Rechnet man also neue k-Werte aus, die an die ursprünglich betrachteten anschließen, so liegen sie in einem Intervall, das dem früheren gegenüber verengt ist, und zwar ist der Kleinstwert größer, der Größtwert kleiner geworden. Es bilden somit die Y_n, welche jeweils unter k aufeinanderfolgenden die untere Schranke darstellen, eine niemals abnehmende, diejenigen, welche die obere Schranke bilden, eine niemals zunehmende Folge. Die erste dieser Folgen ist nach oben, die zweite nach unten beschränkt, jede hat somit einen Grenzwert A bzw. B. Dies bedeutet, daß man zu jedem beliebig klein vorgegebenen ε ein n' bestimmen kann, derart, daß für jede Gruppe von k aufeinanderfolgenden Y_n-Werten, deren Indizes sämtlich größer als n' sind, der Kleinstwert zwischen $A - \varepsilon$ und A, der Größtwert zwischen B und $B + \varepsilon$ liegt.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß unmöglich A und B zwei verschiedene Zahlen sein können oder daß die Differenz $B - A = 0$ sein muß. Zu diesem Zweck schreiben wir Gl. (11), in die bereits $\lambda = \lambda_1$ eingeführt sei, in der Form

$$Y_n = c_0 Y_{n-\nu} + c_1 Y_{n-\nu-1} + \ldots + c_\mu Y_{n-k} \quad \ldots \quad (11'),$$

wobei also $c_0 + c_1 + \ldots + c_\mu = 1$ ist. Nach der Definition von B gibt es zu jedem noch so klein vorgegebenen ε ein so großes n, daß alle Zahlen $Y_{n+1}, Y_{n+2}, Y_{n+3}, \ldots$ unterhalb $B + \varepsilon$ liegen. Andererseits muß nach der Definition von A unter k aufeinanderfolgenden dieser Zahlen mindestens ein Y_ϱ vorhanden sein, das nicht größer als A ist. Es folgt daher aus (11')

$$\left.\begin{array}{l} Y_{\varrho+\nu} \leqq c_0 A + (1 - c_0)(B + \varepsilon) < B + \varepsilon - c_0 (B - A) \\ Y_{\varrho+\nu+1} \leqq c_1 A + (1 - c_1)(B + \varepsilon) < B + \varepsilon - c_1 (B - A) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (14).$$

Ist c der kleinste unter den echten Brüchen $c_0, c_1, \ldots c_\mu$, so gilt demnach

$$Y_n \leqq B + \varepsilon - c(B - A) \text{ für } n = \varrho + \nu, \varrho + \nu + 1, \ldots \varrho + k \quad \ldots \quad (14').$$

Mindestens je einer dieser Y_n-Werte geht in die Berechnung der Größen $Y_{\varrho+2\nu}$ bis $Y_{\varrho+2k}$ ein, so daß für jedes dieser Y_n analog (14) eine Ungleichung der Form

$$Y_n \leqq c_\varkappa [B + \varepsilon - c(B - A)] + (1 - c_\varkappa)(B + \varepsilon) = B + \varepsilon - c\, c_\varkappa (B - A) \quad (14'')$$

für

$$n = \varrho + 2\nu,\ \varrho + 2\nu + 1,\ \ldots \varrho + 2k$$

besteht, wobei $c_\varkappa$ einer der Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots c_\mu$ ist. Da nun $2k - 2\nu + 1$ in unserem Fall größer als k ist, nämlich 61 gegenüber 45, so haben wir hier eine Reihe von mehr als k (nämlich von 61) aufeinanderfolgenden Y_n-Werten, die, wenn $B - A > 0$ ist, sämtlich unterhalb B liegen. Der Definition von B nach müßte sich aber unter je k aufeinanderfolgenden Werten mindestens einer finden, der nicht kleiner als B ist. Somit führt die Annahme $B - A > 0$ zu einem Widerspruch, der Bereich, in dem k aufeinanderfolgende Y_n liegen, verengt sich auf Null, d. h. die Y_n streben einem bestimmten positiven Grenzwert zu.

Bezeichnen wir den Grenzwert mit C, so ist nach (10):

$$\lim \frac{\overline{y}_n}{\lambda_1^n} = C \quad (15)$$

oder für große n:

$$\overline{y}_n \sim C \lambda_1^n .$$

Es verhält sich somit $\overline{y}_n$ asymptotisch wie $C \lambda_1^n$; dabei ist C eine positive — durch die Anfangsbedingungen bestimmte — Konstante und λ_1 ist die zu jedem $\varkappa_w$ gehörige positive reelle Wurzel der Gl. (12). Wie bereits bemerkt, ist $\lambda_1 \gtreqless 1$, je nachdem $\varkappa_w \gtreqless \varkappa_0 = \frac{1}{a_0 + a_1 + \ldots + a_\mu}$.

Wir haben somit gezeigt, daß die Geburtenzahlen der Mädchen $\overline{y}_n$ sich asymptotisch wie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten λ_1 verhalten. Da nach (8) jede der Geburtenzahlen y_n der Knaben sich linear aus einer endlichen Zahl von $\overline{y}_n$ zusammensetzt, gilt die gleiche Behauptung auch für die y_n. Da schließlich die Bevölkerungszahl jeder Altersklasse aus der betreffenden Geburtenzahl durch Multiplikation mit der festen Überlebenszahl hervorgeht, ist jetzt der Satz bewiesen:

Je nachdem der weibliche Geburtenindex $\varkappa_w$ gleich, kleiner oder größer als die in (13) angegebene, durch die Absterbeordnung bestimmte Größe $\varkappa_0$ ist, hat man eine im Limes stationäre, eine im Limes wachsende oder eine gegen Null konvergierende Bevölkerung.

3. Diskussion. Will man der Fragestellung, ob unter den gegenwärtigen Verhältnissen das deutsche Volk ein wachsendes oder abnehmendes ist, einen klaren Sinn geben, so kann man nur von den heute bestehenden Werten, der heutigen Absterbeordnung, der heutigen Altersschichtung und der heutigen Geburtenzahl ausgehen.

Man kann nun einerseits den Grenzverlauf ins Auge fassen und so vorgehen, daß man den aus den heutigen Geburtenzahlen folgenden Wert von $\varkappa_w$ mit dem aus der heutigen Absterbeordnung folgenden Wert $\varkappa_0$ vergleicht. Je nachdem $\varkappa_w$ größer, gleich oder kleiner als $\varkappa_0$ ist, haben wir eine in der Grenze zunehmende, stationäre oder abnehmende Bevölkerung. Die Geburtenziffer beträgt, je nachdem man die Zahlen von 1925/26 oder 1926/27 zugrunde legt:

$$\varkappa_w^{(1925)} = 0{,}03606 ,$$

$$\varkappa_w^{(1926)} = 0{,}03380 .$$

Die Ausrechnung von $\varkappa_0$ gemäß (13) nach der Sterbetafel ergibt:

$$\varkappa_0 = 0{,}03952 .$$

Daraus folgt, daß schon $\varkappa_w^{(1925)}$ eine im Limes abnehmende Bevölkerung ergibt und daß $\varkappa_w^{(1926)}$ eine in der Grenze noch stärker abnehmende Volkszahl bedeutet. Um den Grad der Abnahme kennenzulernen, rechnen wir aus (12) für $\varkappa_w^{(1925)} = 0{,}03606$ bzw. für $\varkappa_w^{(1926)} = 0{,}03380$ die größte positive Wurzel λ_1. Setzt man für $a_0, \ldots, a_{30}$ die Werte $\overline{l}_{15}, \overline{l}_{16}, \ldots$ aus der Absterbeordnung ein, so lautet die Gleichung mit dem ersten $\varkappa_w$-Wert:

$$\lambda^{45} = 0{,}03606 \cdot [0{,}86877 \cdot \lambda^{30} + 0{,}86719\, \lambda^{29} + \ldots\ldots + 0{,}76704] ,$$

mit dem zweiten

$$\lambda^{45} = 0{,}03380 \cdot [0{,}86877 \cdot \lambda^{30} + 0{,}86719\, \lambda^{29} + \ldots\ldots + 0{,}76704] .$$

Die bei 1 liegende positive Wurzel ist im ersten Fall 0,997, im zweiten 0,995. Es würde sich also nach der Geburtenzahl von 1925 ein im Limes wie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten 0,997 abnehmende, gemäß 1926 eine entsprechend dem Quotienten 0,995 noch stärker abnehmende Bevölkerungszahl ergeben.

Andererseits hat die vorausgeschickte Rechnung gezeigt (vgl. Abschnitt 1), daß mindestens bis 1945 die Bevölkerung nach beiden Annahmen noch zunimmt (von 62,41 auf 70,19 bzw. 68,88 Millionen), und wenn auch theoretisch auf Grund unseres Satzes die entgegengesetzte Aussage über den asymptotischen Verlauf der Bevölkerungsentwicklung gemacht werden kann, so kommt doch praktisch einer so weitgehenden Verfolgung der aus den heutigen Daten (von 1925 und 1927) sich ergebenden Konsequenzen keine große Bedeutung zu. Denn weder die Absterbeordnung noch der Geburtenkoeffizient kann auf einen Zeitraum von mehr als 15 Jahren hinaus als auch nur annähernd konstant angesehen werden. Von allen anderen Einflüssen, wie Änderung der hygienischen Verhältnisse usf., abgesehen, muß man bedenken, daß jede merkliche Änderung der Bevölkerungsentwicklung eine gewisse Selbstkorrektur auslöst: Ist einmal die Wirkung der verminderten Bevölkerungszunahme fühlbar geworden, so schwächen sich von selbst die Tendenzen ab, die auf diese Verminderung hingearbeitet haben.

Von den bisherigen Veröffentlichungen über die voraussichtliche Bevölkerungsentwicklung Deutschlands entspricht die von Burgdörfer[6]) in ihren Grundlagen unseren Betrachtungen im Abschnitt 2. Ohne die mathematische Präzisierung, die wir dem Problem gegeben haben, führt Burgdörfer einen Vergleich zwischen einer „bereinigten Sterbeziffer" und einer „bereinigten Geburtenziffer" durch, die im wesentlichen auf unsere Gegenüberstellung der Größen $\varkappa_w$ und $\varkappa_0$ hinauskommt. Die zahlenmäßig geringen Abweichungen seines Ergebnisses von unseren rühren daher, daß er von etwas verschiedenen Daten ausgeht. Gegenüber seinen stark pessimistischen Schlußfolgerungen ist darauf hinzuweisen, daß sie — wie unsere Präzisierung zeigt — eben nur den asymptotischen Verlauf treffen, der, wie wir gesehen haben, sich erst in einem Zeitpunkt jenseits des zulässigen Anwendungsbereiches der Ausgangswerte geltend macht.

Auf anderen Grundlagen beruhen die Rechnungen in den beiden eingangs genannten neueren statistischen Arbeiten[6]). In ihnen wird kein Geburtenindex in unserem Sinne benutzt, sondern eine andere Größe, die die Geburten charakterisiert, als konstant angesehen. In der zweiten dieser Arbeiten wird von der Geborenenzahl des Jahres 1927 ausgegangen, die für alle folgenden Jahre dann als fest und unabhängig von der Anzahl der 15- bis 45-jährigen Frauen angesehen wird. Die Verfasser geben ihre Resultate ohne genaue Zahlen in einer Zeichnung an. Hiernach erreicht die Bevölkerungszahl um 1960 ihren Höhepunkt mit etwa 69,8 Millionen, um darauf allmählich abzunehmen und sich schließlich etwa im Jahre 2000 auf der Höhe von 66,5 Millionen zu stabilisieren. Über den Wert einer auf den heutigen Daten fußenden Vorausberechnung auf 70 Jahre hinaus gilt, was wir schon vorher gesagt haben. Vergleichen wir das Ergebnis von 1925 bis 1945 mit dem unserer zweiten, ungünstigeren Berechnung, so ergeben unsere Resultate etwas höhere Bevölkerungszahlen, gegenüber 68,4 Millionen rund 68,88 Millionen. Dies ist auf die starke Besetzung der mittleren Jahrgänge zurückzuführen, da unsere Geborenenzahl abhängig ist von der Anzahl der 15- bis 45-jährigen Frauen. Andererseits führt aber unsere Rechnung bei weitergehender Extrapolation zu einer ständigen Abnahme gegenüber dem dort angenommenen Konstantbleiben der Geburtenzahlen.

Eine noch andere Berechnungsbasis für die zukünftigen Geburtenzahlen, eine sogenannte Eheziffer, wird in der Ausarbeitung des Statistischen Reichsamtes[6]) benutzt. Die Eheziffer ist das Produkt aus der Anzahl der Ehen innerhalb 5 Jahren und der durchschnittlichen Kinderzahl pro Ehe. Für die Berechnungen hat der Verfasser die Annahme gemacht, daß die Geburtenzahl etwa bis zum Jahre 1950 sinkt und dann auf diesem Punkt stehen bleibt. Das Ergebnis ist ein immer langsamer werdendes Ansteigen der Bevölkerungszahl auf die Höhe von 65 Millionen bis zum Jahre 1940. Von diesem Zeitpunkt ab würde die Volkszahl sehr schnell abnehmen und zwar bis zum Jahre 1975 auf 46 Millionen, um darauf noch weiter zu sinken. Die Voraussetzungen über die zukünftigen Geburten scheinen hier so willkürlich zu sein, daß ein Vergleich mit unserer Rechnung nicht möglich ist.

Das praktische Ergebnis der ganzen Untersuchung können wir dahin zusammenfassen, daß die heute gegebenen Verhältnisse ein Anwachsen der deutschen Bevölkerung in den nächsten 15 Jahren voraussehen lassen, während den darüber hinausgehenden Schlußfolgerungen kaum eine wesentliche Bedeutung und sicherlich keine Zuverlässigkeit zukommt.

[6]) S. Fußnote [1]).

KLEINE MITTEILUNGEN

Bestimmung des Steifigkeitswertes von Körpern durch zwei Näherungsverfahren. Ist für einen belasteten Körper die exakte elastische Lösung nicht bekannt, so kann man Näherungslösungen des Spannungszustandes aufstellen. Für den Steifigkeitswert des Körpers = äußere Kraft : (Verschiebung in Richtung der Kraft × Elastizitäts- oder Gleitmodul) findet man hierdurch in bekannter Weise zu kleine Werte. Es ist zur Fehlerabschätzung erwünscht, einen weiteren Wert zu bestimmen, der größer ist, als die exakte Lösung gibt. Hierfür kann man Näherungslösungen des Verschiebungszustandes verwenden. Die Durchführung sei an einem nicht ganz banalen Beispiele gezeigt.

Drillung eines Stabes, dessen Querschnitt ein Hohlquadrat ist.

Drillmoment M_d, Drillung ϑ, Steifigkeitswert des Querschnittes = Steifigkeitsmoment gegen Drillung (oder Drillungswiderstand)

$$J_d = \frac{M_d}{\vartheta\, G}.$$

Bestimmung des Steifigkeitsmomentes mit Hilfe des Minimums der Spannarbeit.

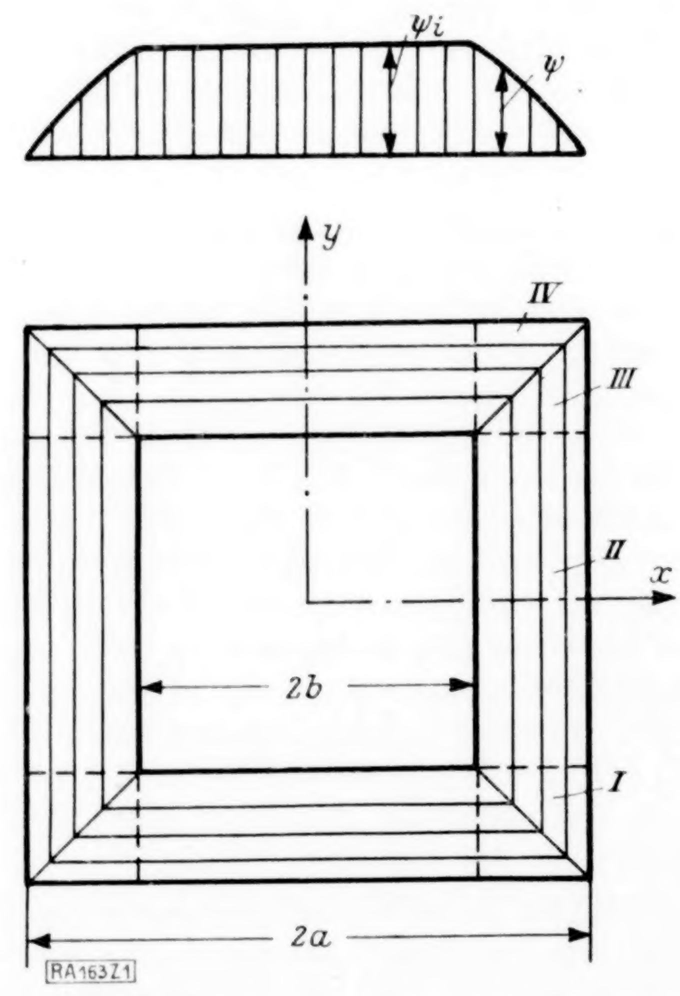


Abb. 1. Einteilung des Querschnittes in Gebiete und Spannungsfunktion ψ nach Annahme 1.

Von allen Lösungen des Spannungszustandes, die den Gleichgewichtsbedingungen genügen, die Bedingungen des inneren Zusammenhanges jedoch unbeachtet lassen, gibt die exakte Lösung den Kleinstwert für die Spannarbeit A_s (Formänderungsarbeit ausgedrückt durch die Spannungen).

Man setzt zur Befriedigung des Gleichgewichts

$$\tau_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \tau_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

und macht für die Spannungsfunktion ψ einen beliebigen Ansatz unter Beachtung folgender Bedingungen: Im Innern ist ψ stetig, braucht aber keine stetigen Ableitungen zu haben, am Außenrande wird $\psi = 0$, an jedem Innenrande eines Hohlraumes gleich einer anderen Konstanten.

Das Steifigkeitsmoment wird

$$J_d = \frac{M_d}{\vartheta\, G} = \frac{M_d{}^2}{2\, G\, A_s} = \frac{\left[\int \operatorname{grad}\frac{r^2}{2}\cdot \operatorname{grad}\psi \cdot d f\right]^2}{\int \operatorname{grad}^2 \psi \cdot d f}.$$

Da A_s der Näherungslösung zu groß wird, so wird J_d zu klein.

Setzt man z. B. für das Gebiet I—III nach Abb. 1

$$\psi = c\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

so erhält man $J_d \lesseqgtr 2\cdot(a^4 - b^4)$.

Setzt man die Näherungslösung ψ aus Einzellösungen $a_i\,\psi_i$ mit noch wählbaren Koeffizienten a_i zusammen, so lassen sich die a_i so bestimmen, daß A_s ein Minimum bei konstantem M_d wird (Ritzsches Verfahren) und erhält die günstigste Kombination der Einzellösungen.

Bestimmung des Steifigkeitsmomentes mit Hilfe des Minimums der Zerrarbeit.

Von allen Lösungen des Formänderungszustandes, die den Bedingungen des inneren Zusammenhanges genügen, die Gleichgewichtsbedingungen aber außer acht lassen, gibt die exakte Lösung den Kleinstwert der Zerrarbeit A_z (Formänderung ausgedrückt durch die Zerrungen, d. h. Dehnungen und Schiebungen).

Ist ζ die bei der Drillung eintretende Verwölbung, so wird

$$\gamma_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \vartheta\, y, \qquad \gamma_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \vartheta\, x.$$

Für ζ wird ein beliebiger Ansatz gemacht. Im Inneren muß ζ stetig sein, braucht aber keine stetigen Ableitungen zu haben.

Die Zerrarbeit wird

$$A_z = \frac{1}{2}\, G \int (\gamma_x{}^2 + \gamma_y{}^2)\cdot d f$$

und das Steifigkeitsmoment gegen Drillung

$$J_d = \frac{M_d}{\vartheta\, G} = \frac{2\, A_z}{\vartheta^2\, G} = \frac{1}{\vartheta^2}\int \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \vartheta\, y\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \vartheta\, x\right)^2\right]\cdot d f.$$

Da A_z zu groß ist, so gilt dieses auch für J_d.

Für den einfachsten Ansatz $\zeta = 0$ wird

$$J_d \leqq \int (x^2 + y^2)\cdot d f = J_x + J_y = J_p.$$

Hieraus folgt die bekannte Tatsache, daß J_p für alle Querschnitte außer Kreis und Kreisring größer als J_d ist.

Für das Hohlquadrat erhält man

$$J_d \leqq \frac{8}{3}\,(a^4 - b^4),$$

so daß schon hierdurch der genaue Wert J_d beiderseits eingegrenzt ist.

Macht man den der Wirklichkeit näherkommenden Ansatz:

Gebiet II,

Abb. 1 ... $\zeta = (x - b)\, y\, \vartheta$, $\gamma_x = 0$, $\gamma_y = (2x - b)\, \vartheta$,

Gebiet III,

Abb. 1 ... $\zeta = (x - y)\, y\, \vartheta$, $\gamma_x = 0$, $\gamma_y = 2\,(x - y)\, \vartheta$,

so wird

$$J_d \leqq \frac{8}{3}\, a\,(a^3 - b^3).$$

Abb. 2 zeigt $\frac{J_d}{J_p}$ als Funktion von $\frac{b}{a}$ sowohl für die angeführten als auch einige weitere Näherungsansätze. Die Näherungslösungen stellen genaue Lösungen eines Problemes dar, bei dem außer

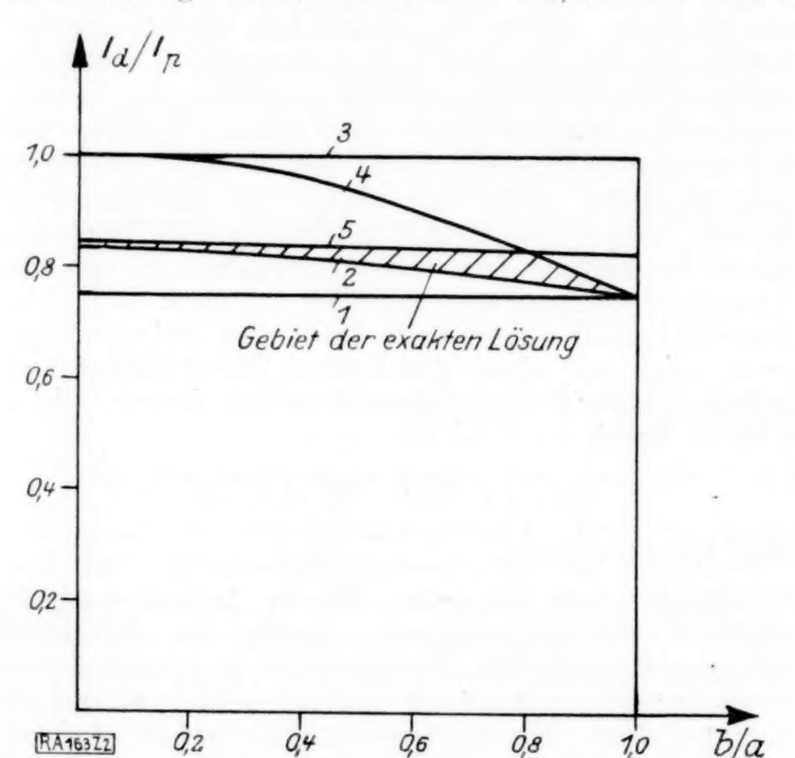


Abb. 2. I_d/I_p als Funktion von b/a. I_d-Näherungswerte.

Durch die Spannarbeit bestimmt:

1. In I—III: $\psi = c\,(1 - x^2/a^2)$, $I_d = 2\,(a^4 - b^4)$.
2. In II: $\psi = c\,(1 - x^2/a^2)\,(1 - b^2/a^2)$,
   in III u. IV: $\psi = c\,(1 - x^2/a^2)\,(1 - y^2/a^2)$,

$$I_d = \frac{20}{9}\,\frac{(a^3 - b^3)^3}{(a - b)^2\,(a^3 + 2a^2 b + 3ab^2 + 1{,}5\,b^3)}.$$

Durch die Zerrarbeit bestimmt:

3. $\zeta = 0$; $I_d = I_p = 8\,(a^4 - b^4)/3$.
4. In II: $\zeta = (x - b)\, y\, \vartheta$,
   in III: $\zeta = (x - y)\, y\, \vartheta$, $I_d = 8\,(a^3 - b^3)/3$.
5. $\zeta = \alpha\,(x^3 y - x y^3)\,\vartheta$
   mit $\alpha = 7\,(a^6 - b^6)/18\,(a^8 - b^8)$
   nach Ritz berechnet,

$$I_d = \frac{8}{3}\,(a^4 - b^4)\left[1 - \frac{7}{45}\,\frac{(a^6 - b^6)^2}{(a^8 - b^8)\,(a^4 - b^4)}\right].$$

dem Drillungsmomente noch weitere achsiale Kräfte im Inneren und am Außenrande des Körpers angreifen. In Gebieten, in denen ζ eine Potentialfunktion ist, wird diese Innenbelastung Null. In den gemeinsamen Rändern zusammenstoßender Gebiete erhält man eine Belastung, die auf den diesen Linien entsprechenden Zylinderflächen wirkt und durch den Sprung des Wertes γG gegeben ist. Die Außenbelastung ist durch $\gamma_x G$ und $\gamma_x G$ gegeben. Ist ζ eine Potentialfunktion, so können die Flächenintegrale zum Teil in Randintegrale umgewandelt werden.

Auch bei diesem Verfahren kann man ζ aus Einzellösungen mit variablen Koeffizienten zusammenstellen und das Ritzsche Verfahren anwenden.

Dresden, den 23. Februar 1931.

C. Weber. 163

Ein graphisches Verfahren zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems mit komplexen Koeffizienten. Es sei gegeben ein System von n linearen Gleichung mit n Unbekannten:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} z_i + a_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Die n^2 Koeffizienten a_{ik}, sowie die n Konstanten a_k seien beliebige komplexe Zahlen, die im folgenden in der Gaußschen Darstellungsweise als Zeiger in der Ebene der komplexen Zahlen benutzt werden.

Trägt man die zu jeder Gleichung gehörigen $(n+1)$ komplexen Zahlen in der durch die Gleichung gegebenen Reihenfolge aneinander an, als ob man ihre Summe bilden wollte, so ist durch die entstehenden n Polygonzüge

$$(A_{0k},\ A_{1k},\ \ldots\ldots A_{nk},\ A_{(n+1)k};\quad k = 1, 2, \ldots n)$$

das Gleichungssystem vollständig charakterisiert. Da in der Aufgabestellung eine jede der Ausgangsgleichungen durch eine andere dem System angehörige Gleichung — im allgemeinen also durch eine Gleichung von der Form:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik} z_i = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ersetzt werden kann, so erübrigt sich sogar eine Orientierung dieser Polygonzüge in einem Koordinatensystem; denn eine Drehung des (in sich starren) Polygonzuges um seinen Nullpunkt A_{0k} bedeutet nichts anderes als die Multiplikation der Gleichung mit einem Faktor $\alpha_k = e^{i\varphi_k}$.

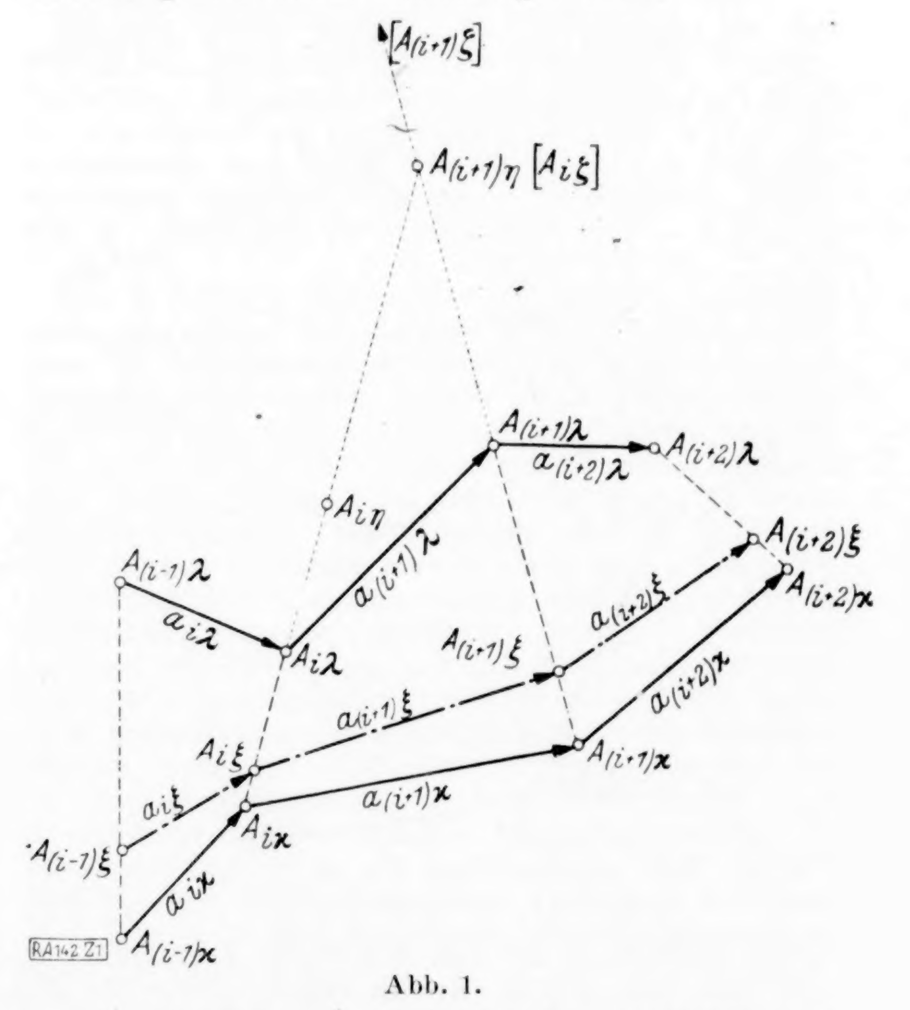


Abb. 1.

Im folgenden wird zunächst angegeben, wie man aus den gegebenen n Polygonzügen auf graphischem Wege Polygonzüge ableiten kann, die beliebigen weiteren Gleichungen — vgl. (1) — des Systems entsprechen, und ferner werden unter diesen neuen Polygonzügen solche ermittelt, die — im Sinne des bekannten Eliminationsprozesses — von zunächst mindestens einer Unbekannten „befreit" sind, für die also für mindestens ein i

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik} = 0$$

ist.

a) Abb. 1 zeigt je ein Teilstück aus zwei Ausgangspolygonzügen $P_\varkappa$ und P_λ und zwar je die den (komplexen) Koeffizienten der Unbekannten z_i, z_{i+1}, z_{i+2} entsprechenden gerichteten Strecken

$$a_{i\varkappa} (= \overline{A_{(i-1)\varkappa} A_{i\varkappa}}), \qquad a_{(i+1)\varkappa} (= \overline{A_{i\varkappa} A_{(i+1)\varkappa}}),$$

$$a_{(i+2)\varkappa} (= \overline{A_{(i+1)\varkappa} A_{(i+2)\varkappa}})$$

bzw.

$$a_{i\lambda} (= \overline{A_{(i-1)\lambda} A_{i\lambda}}), \qquad a_{(i+1)\lambda} (= \overline{A_{i\lambda} A_{(i+1)\lambda}}),$$

$$a_{(i+2)\lambda} (= \overline{A_{(i+1)\lambda} A_{(i+2)\lambda}}).$$

Es wird behauptet, daß ein jeder Polygonzug P, dessen Ecken auf den Verbindungslinien entsprechender Ecken der Ausgangspolygonzüge liegen und diese Strecken — sie seien Ecktransversalen genannt — alle im gleichen Verhältnis teilen, eine dem gegebenen System angehörige Gleichung repräsentiert.

Es ist

$$\overline{A_{(i-1)\varkappa} A_{i\varkappa}} + \overline{A_{i\varkappa} A_{i\lambda}} = \overline{A_{(i-1)\varkappa} A_{(i-1)\lambda}} + \overline{A_{(i-1)\lambda} A_{i\lambda}}$$

oder

$$\overline{A_{i\varkappa} A_{i\lambda}} - \overline{A_{(i-1)\varkappa} A_{(i-1)\lambda}} = a_{i\lambda} - a_{i\varkappa}.$$

Da die Ecken des Polygonzuges P_ξ die Ecktransversalen im gleichen Verhältnis teilen sollen, so ist ferner:

$$a_{i\xi} = a_{i\varkappa} + \tau \cdot \overline{A_{i\varkappa} A_{i\lambda}} - \tau \cdot \overline{A_{(i-1)\varkappa} A_{(i-1)\lambda}}$$

$$= a_{i\varkappa} + \tau \cdot (a_{i\lambda} - a_{i\varkappa}) = \tau \cdot a_{i\lambda} + (1-\tau) \cdot a_{i\varkappa}.$$

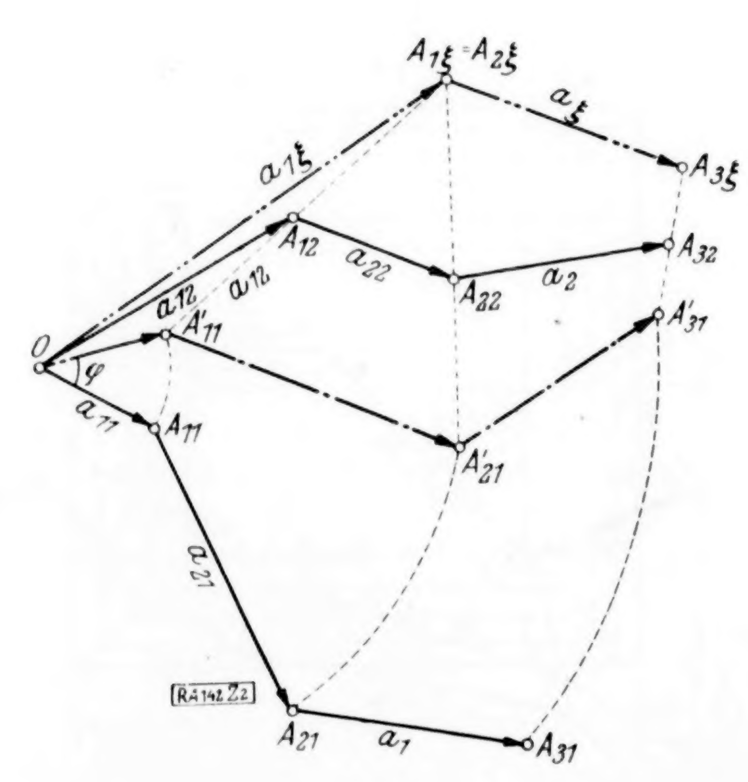


Abb. 2.

Diese Beziehung ist von der Stelle i unabhängig, gilt also für jeden Koeffizienten, sowie für die Konstante des neuen Polygonzuges P_ξ. Dabei ist es gleichgültig, ob man die Nullpunkte aller Polygonzüge zusammenfallen läßt oder nicht. Andernfalls teilt der Nullpunkt von P_ξ die Ecktransversale $A_{0\varkappa} A_{0\lambda}$ in dem gegebenen Verhältnis.

Die durch P_ξ repräsentierte Gleichung lautet also:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_\varkappa a_{i\varkappa} + \alpha_\lambda a_{i\lambda}) z_i = \alpha_\varkappa a_\varkappa + \alpha_\lambda a_\lambda,$$

wobei $\alpha_\varkappa = (1-\tau)$ und $\alpha_\lambda = \tau$ reelle Koeffizienten sind, und gehört somit dem gegebenen System linearer Gleichungen an.

Hiermit ist zugleich der allgemeine Fall der Koeffizienten-Bildung zur Ableitung neuer Gleichungen des Systems nach Vorschrift von Gl. (1) erledigt; denn jede der Ausgangsgleichungen kann vor ihrer Verwertung durch Schwenken des Polygonzuges um seinen Nullpunkt mit einem komplexen Faktor $e^{i\varphi_\varkappa}$ multipliziert werden, und die Verwertung von mehr als zwei Gleichungen kann schrittweise erfolgen.

b) Variiert man in Abb. 1 den Wert des Teilungsverhältnisses τ, so erhält man aus $P_\varkappa$ und P_λ unendlich viele neue Polygonzüge, deren Ecken alle auf den Ecktransversalen liegen und diese je im gleichen Verhältnis teilen. Man überschaut, daß im vorliegenden Falle keiner von allen diesen Polygonzügen einen Eliminationsprozeß für z_i, z_{i+1} oder z_{i+2}, deren Koeffizienten in der Abbildung dargestellt werden, verkörpert, denn sonst müßte mindestens eine der abgeleiteten Koeffizienten-Strecken für P_ξ verschwinden. Ein Zusammenfallen der Endpunkte einer Koeffizienten-Strecke könnte aber nur im Schnittpunkt zweier benachbarter Ecktransversalen geschehen. Dieser teilt deren Abschnitte zwischen den beiden Ausgangspolygonzügen aber nur dann im gleichen Verhältnis, wenn die zwischen den beiden Transversalen liegenden, sich entsprechenden Seiten der Ausgangspolygonzüge einander parallel sind. (Andernfalls wird eine zweite Ecke des Polygonzuges zwar auch auf einer der beiden Ecktransversalen, jedoch nicht im Schnittpunkt selbst liegen, wie in Abb. 1 durch

$$A_{(i+1)\eta} A_{i\eta}; \quad A_{i\zeta} A_{(i+1)\zeta}$$

angedeutet wurde.)

Nach oben Gesagtem ist es jedoch möglich, stets je zwei entsprechende Seiten der Ausgangspolygonzüge durch Drehen der in sich starren Polygonzüge parallel zu machen, ehe man an die Konstruktion der Koeffizienten-Strecken der abzuleitenden Gleichung herangeht. Dies ist für den Fall zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten in Abb. 2 ausgeführt worden.

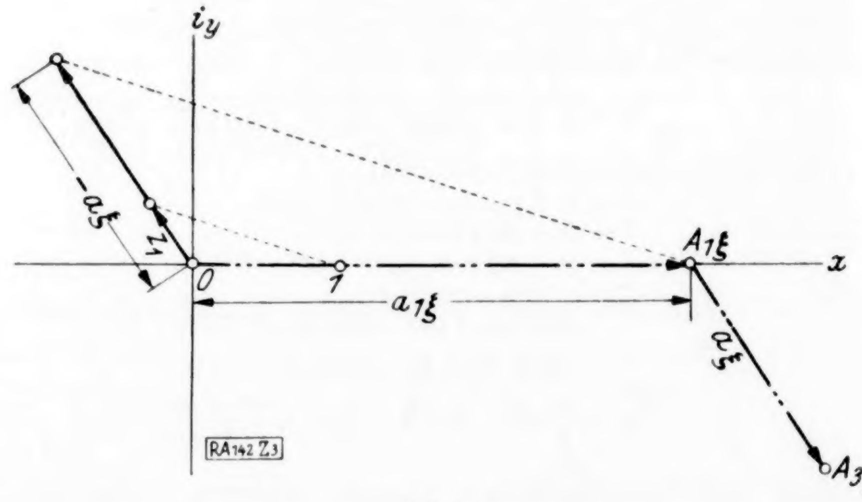


Abb. 3.

Die Ausgangsgleichungen lauteten:

$$(1 \cdot 55 - i\,0 \cdot 78)\, z_1 + (2 \cdot 04 - i\,3 \cdot 72)\, z_2$$
$$+ (3 \cdot 18 - i\,0 \cdot 34) = 0 = P_1 (0, A_{11}, A_{21}, A_{31})$$

$$(3 \cdot 27 + i\,2 \cdot 18)\, z_1 + (2 \cdot 21 - i\,0 \cdot 77)\, z_2$$
$$+ (2 \cdot 83 + i\,0 \cdot 59) = 0 = P_2 (0, A_{12}, A_{22}, A_{32}).$$

Der Polygonzug P_1 wurde durch einen Winkel φ um den Punkt 0 gedreht in die Lage P_1' $(0, A_{11}', A_{21}', A_{31}')$, so daß nunmehr $A_{11}' A_{21}'$ parallel $A_{12} A_{22}$ ist. Im Schnittpunkt der Ecktransversalen $A_{11}' A_{12}$ und $A_{21}' A_{22}$ fallen die beiden Eckpunkte $A_{1\xi}$ und $A_{2\xi}$ des gesuchten Polygonzuges, für den

der Koeffizient von z_2 verschwindet, zusammen, und das Teilungsverhältnis

$$A_{11}'\,A_{12} : A_{12}\,A_{1\xi} = A_{21}'\,A_{22} : A_{22}\,A_{2\xi}$$

bestimmt auf der dritten Ecktransversale $A_{31}'\,A_{32}$ die Lage des Punktes $A_{3\xi}$. Die Gewinnung von z_1 aus P_ξ ist der Übersichtlichkeit halber in Abb. 3 gesondert dargestellt. Es ergibt sich aus der Zeichnung $z_1 = -0 \cdot 26 + i\,0 \cdot 40$, aus der Rechnung mit dem Rechenstab $z_1 = -0 \cdot 265 + i\,0 \cdot 406$, mit der Maschine $z_1 = -0 \cdot 260 + i\,0 \cdot 406$. (Als Einheit des Maßstabes wurde in der Originalzeichnung für das Auftragen der Polygonzüge gewählt 1 cm, für die Ablesung von x 2 cm. Durch größere Maßstäbe läßt sich die Genauigkeit des graphischen Verfahrens noch erhöhen.)

c) Es sei zuletzt noch einiges zur praktischen Durchführung des graphischen Verfahrens gesagt. Alle Zeichnungen werden am besten auf transparentem Papier angelegt. Und zwar zeichne man jeden der Ausgangspolygonzüge auf ein besonderes Blatt. Das Auftragen der Ausgangspolygonzüge geschieht am besten durch Unterlegen des transparenten Bogens mit einem Blatt Millimeterpapier, oder, falls die komplexen Zahlen in der Form $r \cdot e^{i\varphi}$ gegeben sind, durch Unterlegen von Polarkoordinatenpapier. Eine Parallelverschiebung des Papiers zum bequemeren Abtragen der einzelnen, meist nicht ganzzahligen Koeffizienten ist natürlich erlaubt.

Zur Ableitung der um eine Seite verkürzten Polygonzüge legt man immer je zwei Bogen übereinander, so daß irgend zwei entsprechende Seiten der Ausgangspolygonzüge einander parallel sind. Dabei wird man im allgemeinen nach Belieben den Nullpunkt der zwei Polygonzüge oder zwei andere sich entsprechende Punkte zusammenfallen lassen, um die Teilung für eine Ecktransversale zu sparen.

Um das durch ihren Schnittpunkt gegebene Teilungsverhältnis der die beiden parallelen Seiten einschließenden Ecktransversalen auf die anderen Ecktransversalen zu übertragen, empfiehlt es sich, entweder mit Stechzirkel, Maßstab und e i n e r Einstellung des Rechenschiebers zu arbeiten, oder einen dritten Bogen, auf den man die drei Teilpunkte einer der schon geteilten Transversalen abgetragen hat, unter den zwei transparenten Blättern so zu verschieben, daß man durch Zusammenfallen zweier entsprechender Ecken und Parallelenziehen die neuen Teilpunkte auf den weiteren Ecktransversalen erhält.

Jena, Institut für angewandte Mathematik.

Dorothea S t a r k e. 142

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus zu beziehen.)

Bericht der Versuchsanstalt für Kraftfahrzeuge und des Festigkeitslaboratoriums der Technischen Hochschule zu Berlin von Dr.-Ing. GABRIEL **BECKER,** o. Prof., Dr.-Ing. HANS **FROMM,** Privatdozent, Dr.-Ing. HERBERT **MARUHN,** S c h w i n g u n g e n i n A u t o m o b i l l e n k u n g e n („S h i m m y"). M. Krayn, Technischer Verlag G. m. b. H., Berlin 1931. 150 S. 188 Abb.

Der vorliegende Bericht über umfangreiche Forschungsarbeiten teilt nicht nur eine Fülle von Untersuchungsergebnissen bez. der Schwingungen in Automobillenkungen mit, die für den Automobilingenieur selbst neue Unterlagen liefern, sondern er führt auch solche Leser, die dem speziellen Gebiet fernerstehen, mit anerkennenswerter Klarheit und Vollständigkeit in ein noch wenig bekanntes Feld der mechanischen Schwingungslehre ein. Die in Betracht kommenden Bewegungen sind hauptsächlich die verschieden gerichteten der Achse, ferner die des federnd mit ihr verbundenen Rahmens, und das „Flattern" der Wagenräder. Alle diese Bewegungen sind mehrfach miteinander gekoppelt und werden durch die verschiedensten Umstände angeregt. In der Koppelung kommt z. B. den Kreiselmomenten der umlaufenden Räder entscheidender Einfluß zu; diese Umstände sind im einzelnen und in der Koppelung eingehend untersucht worden. Es werden auch statische Konstruktionen, durch geeignete Kreuzstellung der Lenkachse, oder dynamische, durch Einbau von gegenlaufenden Schwungrädern, angegeben zur Ausschaltung der Kreiselmomente. Hervorgehoben sei auch noch die klare Zusammenstellung der erforderlichen Grundlagen aus der Schwingungslehre, die insbesondere auch nichtlineare Charakteristiken für die Schwingungsgleichungen berücksichtigen muß. Von besonderem Interesse sind die Ausführungen über die mögliche Anfachung von Schwingungen durch die Reibung am Boden. Alles in allem ein äußerst anregendes Werk, das auch auf den praktischen Automobilbau nicht ohne Einfluß bleiben wird.

F. N o e t h e r. 182

Dr.-Ing. OTTO **FÖPPL,** a. o. Professor an der Technisch. Hochschule und Vorstand des Wöhler-Instituts, Braunschweig. G r u n d z ü g e d e r T e c h n i s c h e n S c h w i n g u n g s l e h r e. 2., verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 140 Abbildungen im Text. Springer, Berlin 1931. VI + 212 S. Preis 8,50 M, geb. 9,50 M.

Die 2. Auflage dieses Buches ist zwar gegen die erste in vielen Einzelheiten erweitert, ohne daß aber im Gesamtstoff sehr wesentliche Änderungen vorgenommen wären. Daher kann wegen des Inhalts auf die frühere Besprechung (diese Ztschr. Bd. 4, S. 439, 1924) hingewiesen werden. Es liegt hier nicht, wie der Titel eigentlich erwarten ließe, eine prinzipielle Grundlegung der technischen Schwingungslehre vor, wozu auch eine nähere Erläuterung der in den Ansätzen enthaltenen physikalischen Gesetze gehören würde. Vielmehr handelt es sich darum, mit den üblichen, und zwar durchweg den linearen Ansätzen eine große Reihe von technischen Schwingungsproblemen durchzuführen, von der einfachen Federschwingung bis zu den Schwingungen umlaufender Wellen und komplizierteren Formen des Massenausgleichs. In diesem Sinne ist es als reichhaltiges und vielfach auf eigenen Erfahrungen des Verfassers beruhendes Lehrbuch für Maschinen- und Bauingenieure sehr zu empfehlen.

In gewissem Gegensatz zu dieser praktischen Einstellung steht aber der im letzten Kapitel gemachte Versuch, den Schwere- und Trägheitsbegriff, den wohl die meisten Ingenieure gern als gegeben hinnehmen, durch ein „Äther"modell zu erklären. Solche Versuche, die an sich nicht neu sind — man denke nur an die Kelvinschen Wirbelatome —, können doch immer nur e i n e Seite der Erscheinungen deuten, wie der Verfasser übrigens selbst erwähnt, und bleiben damit unbefriedigend. Deshalb ist nicht recht einzusehen, welchem Zweck sie im Rahmen eines für den praktischen Unterricht bestimmten Lehrbuchs eigentlich dienen sollen.

F. N o e t h e r. 182

Dr. HEINRICH **BLASIUS**, Studienrat an den Technischen Staatslehranstalten zu Hamburg, Wärmelehre. Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. Verlag Boysen & Maasch, Hamburg 1931. VIII + 232 S. 87 Fig. 13 Tabellen. 48 Aufgaben mit Lösungen. Preis 7,50 M.

Das Ziel dieses Buches war, wie der Verfasser selbst angibt, an der Hand von durchgerechneten Beispielen zum Verständnis der Grundlagen der Wärmelehre zu führen. Demgemäß werden die Grundlagen, wie Temperatur, Zustandsgleichungen, Energie- und Wärmeinhalt, Entropie, auch Wärmeleitung und -strahlung und einige Grundtatsachen der physikalischen Chemie, ausführlich an Beispielen entwickelt. Die Darstellung vermittelt in gewissem Sinne zwischen den weitergehenden theoretischen Auffassungen der Physiker und praktischen der Ingenieure. In der Tat ist das ganze Lehrbuch so leicht faßlich, und doch nicht zu eng geschrieben, daß es nicht nur für technische Mittelschulen, sondern auch für die Hochschulen als Leitfaden der angehenden Maschineningenieure durchaus zu empfehlen ist, ebenso für Physiker, die der technischen Seite des Faches die Aufmerksamkeit widmen wollen, die ihr historisch und sachlich zukommt. Wogegen man sich wenden muß, ist nur die im Vorwort unterstrichene Meinung, als ob diese Unterrichtsform bisher auf einen engen Kreis von Lehrern beschränkt sei. Ich glaube nicht, daß an der Mehrzahl der technischen Unterrichtsanstalten heute die Grundlagen der Wärmelehre in wesentlich anderem Sinne betrieben werden. F. Noether. 182

RICHARD **DEDEKIND**, Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von Robert Fricke in Braunschweig, Emmy Noether in Göttingen, Oeystein Ore in New Haven. Zweiter Band. Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1931. 442 S. Preis geh. 40,50 M, geb. 43 M.

In dem zweiten Band der Werke Dedekinds sind weitere 15 Abhandlungen aus verschiedenen Zeitschriften abgedruckt worden. Darüber hinaus liegen hier 11 Arbeiten vor, die dem Nachlaß Dedekinds entnommen sind. Für den angewandten Mathematiker kommt wohl nur die Arbeit: „Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate" (Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1901) in Betracht. Es wird darin die Vorlesung von Gauß über den genannten Gegenstand im W. S. 1850/51 nach persönlichem Erlebnis interessant geschildert. Die anderen Abhandlungen behandeln hauptsächlich arithmetisch-algebraische und zahlentheoretische Fragen.

G. Szegö. 184

ERNST **STEINITZ**, Algebraische Theorie der Körper. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der Galoisschen Theorie versehen von Reinhold Baer und Helmut Hasse. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. 150 S. Preis 9 M.

Ein Wiederabdruck der für die moderne Algebra eminent wichtigen Steinitzschen Abhandlung: „Algebraische Theorie der Körper" (Journal für Mathematik, 1910) mit Erläuterungen sowie einem Abriß der Galoisschen Theorie. Dem Buch liegt ein Bild des früh verstorbenen Forschers bei.

G. Szegö. 184

Prof. Dr. PAUL **BACHMANN**, Grundlehren der Neueren Zahlentheorie. Mit einem Gedächtnisworte herausgegeben von Prof. Dr. Robert Haussner. Mit 10 Figuren. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10 und Leipzig 1931. XVI + 252 S. Preis 9,50 M.

Eine unveränderte Wiedergabe der 2. Auflage des bewährten Bachmannschen Lehrbuchs der Zahlentheorie. Es werden darin die rationalen und quadratischen Zahlenkörper behandelt. Dem Buch ist ein Gedächtniswort von dem Herausgeber vorangestellt. G. Szegö. 184

D. **LEIB**, Professeur de Mathématiques au Collège Connecticut de l'Université de Yale. Applications du Calcul differentiel et intégral. Traduit de l'anglais et adapté par A. Sallin. Préface de L. Potin de la Revue générale des sciences. Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris 1930.

3500 Aufgaben elementarer Natur aus der Geometrie, Mechanik, Physik und aus anderen Gebieten, die sich auf die Differential- und Integralrechnung sowie auf die Elemente der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen beziehen. Der Verfasser des englischen Originals hat in erster Linie die elementaren Anforderungen des amerikanischen College-Unterrichtes vor Augen gehalten, während die französische Übersetzung für die Mathematikschüler an der Universität und den Fachschulen bestimmt ist. Die einzelnen Übungen werden durch kurze Erklärungen eingeleitet, die jedoch den Anforderungen moderner Strenge nicht immer ganz entsprechen. Auch vom Standpunkt der Klarheit sind einige Formulierungen höchst unbefriedigend. Das Buch dürfte trotz dieser Mängel bei der numerischen Einübung formaler Regeln gute Dienste leisten.

G. Szegö. 184

Dr. phil. ARTHUR **HAAS**, Professor für Physik an der Universität Wien. Einführung in die theoretische Physik. Mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Erster Band. Mit 67 Abb. im Text. Fünfte und sechste, abermals völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. X + 396 S. Preis 15 M.

Das bekannte Lehrbuch von A. Haas, dessen vorige Auflage wir in dieser Zeitschrift schon besprochen haben, liegt jetzt in stark veränderter Form vor. Der erste Band, der im wesentlichen die klassische Physik ohne Eingehen auf atomistische Vorstellungen behandelt, unterscheidet sich von der früheren Auflage vor allem dadurch, daß eine ausführliche Darstellung der Thermodynamik auf Grund ihrer drei Hauptsätze hinzugekommen ist. Ferner ist ein Paragraph über Beugung des Lichtes und einer über die kanonische Form der Bewegungsgleichungen hinzugekommen. Wenn der Umfang doch nur um ein Viertel vermehrt wurde, so rührt das daher, daß sehr vieles aus der früheren Auflage weggeblieben ist. Der Inhalt des ganzes Bandes ist dadurch bestimmt, daß er das Minimum dessen enthalten soll, was der Leser von der klassischen Mechanik, Elektrodynamik und Thermodynamik wissen muß, um die modernen Theorien verstehen zu können. Diese wenigen und wichtigsten Sätze sind aber gründlich und verständlich mit allen notwendigen Ableitungen auseinandergesetzt.

Das Hauptziel des Verfassers ist aber, den Leser im II. Bande möglichst rasch und möglichst vielseitig über die modernen physikalischen Theorien zu informieren. Dieser Band gliedert sich in drei Teile. Der erste über Atomtheorie ist fast völlig von dem entsprechenden Abschnitte der früheren Auflage verschieden, er deckt sich vielmehr ziemlich mit dem 1929 erschienenen Buche des Ver-

fassers über „Atomtheorie". Die Darstellung ist hier auch ziemlich von der des ersten Bandes abweichend. Es wird ein sehr eingehendes und auch gut verständliches Referat über die Ergebnisse der modernen Atomforschung gegeben. Es wird das Spektrum selbst der komplizierteren Atome, die Röntgenspektren, der Zeeman- und Starkeffekt, die Isotopie, die radioaktiven Umwandlungsreihen, die Zertrümmerung der Grundstoffe, die kosmischen Strahlen, die Bandenspektren, die Polarität der Molekeln, der lichtelektrische und Comptoneffekt, ja die Verwandlung von Materie in Licht besprochen. Es ist aber klar, daß es nicht möglich ist, für alles das auch eine befriedigende theoretische Ableitung zu geben, wenn nicht die moderne Quantenmechanik in sehr weitgehendem Maße verwendet wird. Die Darstellung dieser Theorien mit ihrem umfangreichen begrifflichen und mathematischen Apparat ist aber selbstverständlich in einer derartigen Einführung nicht möglich, so daß der Verfasser sich auf eine ziemlich skizzenhaft ausgeführte Quantenmechanik beschränken muß und daher die dargestellten Sätze aus der Atomphysik oft den Charakter eines bloßen Referates behalten.

Der zweite Teil des Bandes gibt eine sehr verständlich gehaltene Darstellung der statistischen Physik; er gliedert sich in die Kapitel: Statistische Begründung der Thermodynamik, kinetische Theorie der Gase, statistische Mechanik und Quantenstatistik. Der dritte Teil ist der Relativitätstheorie gewidmet. Es wird sowohl die spezielle Relativitätstheorie als auch die Einsteinsche Gravitationstheorie behandelt. Auch ein Paragraph über die Diracsche Theorie des Elektrons ist in der neuen Auflage hinzugekommen. Die Bewältigung eines so großen Stoffes auf diesem so schwierigen Gebiete konnte dem Verfasser nur dadurch gelingen, daß das formale Element überall stark hervortritt und die Beziehung der Relativitätstheorie zu den wirklich beobachtbaren Vorgängen etwas zu kurz kommt. Einige Ableitungen sind gegenüber der vorigen Auflage verbessert, aber es scheint mir doch, daß auf einem Gebiete, auf dem in weiten Kreisen so viele Mißverständnisse herrschen, eine gründlichere Darstellung der begrifflichen Grundlagen wünschenswert wäre.

Im ganzen genommen ist kein Zweifel, daß die Einführung in die theoretische Physik von A. Haas mehr wie jedes andere derartige Buch geeignet ist, den Studierenden möglichst rasch in die modernsten physikalischen Theorien einzuführen. Vielleicht ist hier auch die pädagogische Regel mancher Schwimmlehrer richtig, daß man dem Schüler am besten nicht erst langwierig Bewegungen beibringt, sondern ihn kurzweg ins Wasser wirft. Ph. Frank. 176

Dr. MAX **PLANCK,** Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Einführung in die Theorie der Wärme zum Gebrauch bei Vorträgen, sowie zum Selbstunterricht. Mit 7 Figuren. Einführung in die Theoretische Physik. V. Band. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1930. VI + 251 S.

Mit dem vorliegenden Buch erscheint der fünfte und letzte Band von Plancks „Einführung in die theoretische Physik". Nach der Vollendung des ganzen Werkes können wir sagen, daß damit die deutsche Literatur eine Darstellung der Elemente der theoretischen Physik besitzt, die wirklich geeignet ist, den Studierenden so weit zu führen, daß er mit Nutzen Spezialabhandlungen lesen kann. Das Charakteristische des Planckschen Werkes besteht darin, daß überall die Grundbegriffe und Grundgedanken sehr klar herausgearbeitet, alle Ableitungen gründlich und verständlich durchgeführt sind, überall an einfachen Beispielen die allgemeinen Sätze erläutert werden und dafür auf die Anhäufung von Einzelheiten, die in diesem Rahmen nicht exakt begründet werden können, verzichtet wird.

Im vorliegenden fünften Band hat der Verfasser teilweise seine schon früher erschienenen Lehrbücher über Thermodynamik und Wärmestrahlung benützt. Jedoch sind hier gemäß dem Zwecke als ein Teil der Einführung in die theoretische Physik überall nur die Hauptpunkte herübergenommen worden. Der Band besteht aus vier Teilen: I. Thermodynamik, II. Wärmeleitung, III. Wärmestrahlung, IV. Atomistik und Quantentheorie.

Es ist zu hoffen, daß das nun vollendete Werk dazu dienen wird, den Studierenden der Physik die Grundlage für eine verständnisvolle Aufnahme der modernen theoretischen Forschungen zu bieten, die nur durch Verständnis der Gedankengänge und Ableitungen der klassischen theoretischen Physik möglich ist. Ph. Frank. 176

WILHELM H. **WESTPHAL,** a. o. Professor der Physik an der Universität Berlin und Leiter der physikalischen Übungen an der Technischen Hochschule Berlin. Physik. Ein Lehrbuch für Studierende an den Universitäten und Technischen Hochschulen. Zweite Auflage. Mit 492 Abb. Verlag Springer, Berlin 1930. XIV + 571 S. Preis 19,80 M.

In der vorliegenden Auflage dieses besonders für den in der Praxis stehenden Physiker geeigneten vortrefflichen Lehrbuchs der allgemeinen Physik ist gegenüber der ersten Auflage insbesondere das Kapitel über die Quanten- und Atomphysik dem neuesten Stande entsprechend ergänzt worden. Wenn einige weitere Bemerkungen daran geknüpft werden, so beziehen sie sich nicht auf dieses spezielle Buch, sondern auf diesen ganzen Typus von Lehrbüchern. Es ist merkwürdig, wie in derartigen allgemeinen Darstellungen der Physik eine gewisse Tradition eingehalten wird. Wenn auch die neuesten Fortschritte berücksichtigt werden, so ist doch immer ein Grundstock vorhanden, der von Lehrbuch zu Lehrbuch übergeht und allen Wandlungen der Wissenschaft trotzt. Dazu gehört vor allem das einleitende Kapitel, das nach einer alten Überlieferung aus einer Kombination von metaphysischen Betrachtungen mit Beschreibungen von Präzisionsinstrumenten besteht. Ein zweiter, besonders für die Leser dieser Zeitschrift interessanter derartiger Block ist die Behandlung der Mechanik, insbesondere der Hydromechanik, wo sehr wenig von der modernen Auffassung zu finden ist. So werden die allgemeinen Gesetze über die Rolle der idealen Flüssigkeiten innerhalb der allgemeinen Lehre von den zähen Flüssigkeiten nirgends physikalisch klar herausgearbeitet; vielmehr wird die Lehre von der inneren Reibung der Flüssigkeiten unter den „Molekularvorgängen" erwähnt und mehr als eine besondere störende Erscheinung behandelt, als daß auseinandergesetzt würde, wie eigentlich die handgreiflichen Eigenschaften der Flüssigkeiten bei ihrer Bewegung auf ihrer Zähigkeit beruhen. Ph. Frank. 176

Professor Dr.-Ing., Dr. Techn. h. c. VICTOR **KAPLAN,** Brünn, u. Professor Dr. Techn. ALFRED **LECHNER,** Wien. Theorie und Bau von Turbinen-Schnelläufern. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1931. VIII + 301 S. Preis geb 18 M.

Das Buch ist eine völlig neubearbeitete Auflage des 1908 von Kaplan allein verfaßten Werkes „Bau rationeller Francisturbinen-Laufräder". In

seiner gegenwärtigen Gestalt zerfällt es in zwei völlig unabhängige Teile, von denen der zweite die praktischen Ausführungsformen der Kaplanturbinen behandelt. Bekannt ist ja, daß die Entwicklung des Turbinenbaues zu Anordnungen mit sehr hoher Umlaufzahl eine ausgedehnte Verwendung der sogen. Kaplanschen Räderformen mit sich gebracht hat. Während man früher danach gestrebt hatte, dem Wasserlauf innerhalb des Rades möglichst genaue und sorgfältige Führung zu geben, hat sich später herausgestellt, daß bei sehr großen Geschwindigkeiten geringe Schaufelzahl, also weniger Führungsfläche und damit eine Annäherung an das Propellerprinzip vorteilhafter ist. Die Darstellung, die Kaplan jetzt von dieser Entwicklung unter Wiedergabe zahlreicher Ausführungsbeispiele gibt, wird sicherlich weitgehendes Interesse finden.

Im ersten Teil des Buches gibt A. Lechner einen gedrängten Abriß aller jener Kapitel der Hydromechanik, die in Zusammenhang mit der Konstruktion von Kreiselrädern gebracht werden können. Dabei tritt nicht immer zutage, welche Rolle diese Überlegungen bei den im zweiten Teil dargestellten Konstruktionsformen spielen. Die theoretischen Ausführungen sind nicht vollkommen einwandfrei, halten sich aber von größeren Fehlern erfreulicherweise frei. Mises. 189

PAUL **TEREBESI**, Darmstadt. Rechenschablonen für harmonische Analyse und Synthese nach C. Runge. Wissenschaftliche Erläuterungen mit 8 Textabbildungen und 13 Tafeln. Dazu 26 Rechenschablonen, 2 Rechenbeispiele und 2 Kontrollblätter sowie 1 Gebrauchsanweisung. Verlag Julius Springer, Berlin 1930. Preis in Mappe 18 M.

Zur Durchführung des Rungeschen Verfahrens der Harmonischen Analyse unter Einteilung der Periode in 24 gleiche Teile dient eine Reihe von Schablonen auf Kartonblättern. Jedes Blatt läßt in Fensterausschnitten diejenigen auf einer Tabelle zusammengestellten Zahlenwerte hervortreten, die bei der Berechnung des betreffenden Koeffizienten Verwendung finden sollen. Grundsätzlich ist das neue mechanische Hilfsmittel dasselbe, wie es früher durch Pauspapiere mit teilweise geschwärzten Feldern verwirklicht wurde. In der vorliegenden Form mag es sich für praktische Arbeiten vielleicht besser bewähren. Mises. 189

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Prof. Dr. A. **WITTING**, Oberstudienrat i. R. in Dresden, Differentialrechnung. Sammlung Göschen, 87. Bd. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1931. 191 S. 94 Abb. Preis 1,80 M.

Sammlung Göschen 1027. Prof. Dr. HANS **FALKENBERG**, Professor an der Universität Gießen, Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen. Mit 3 Figuren im Text. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1931. 140 S. Preis 1,80 M.

RICHARD **DEDEKIND**, Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von Robert Fricke in Braunschweig, Emmy Noether in Göttingen, Öystein Ore in New Haven. Erster Band. Mit einem Bildnis Dedekinds. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1930. 397 S. Preis geh. 30 M, geb. 32,50 M.

H. v. **MANGOLDT'S** Einführung in die höhere Mathematik. Für Studierende und zum Selbststudium. Vollst. neu bearbeitet und erweitert von Konrad Knopp, ord. Prof. d. Mathematik an der Universität Tübingen. Band I. 5. Aufl. S. Hirzel Verlag in Leipzig 1931. XV + 585 S. mit 112 Fig. Preis 22,50 M.

Prof. Dr. phil. W. **LOREY**, Oberstudiendirektor, und Dr. rer. pol. G. **BEYRODT**, Studienrat, beide an der Öffentlichen Höheren Handelslehranstalt mit Wirtschaftsoberschule zu Leipzig, Tafeln zur Mathematik des Geldverkehrs und der Versicherung. Mit Beispielen und Formeln. I + 37 S. mit 21 Tafeln. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1931. Preis 3,60 M.

Dr.-Ing. KURT **BÖTTCHER**, Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Danzig, Versuche über die Spannungsverteilung im Zughaken. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 337. Mit 24 Abb. und 5 Zahlentafeln. 20 S. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1931.

A. S. M. E. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. 1929, Bd. 51 in 2 Teilen. XXXVIII + 2153 S. Verlag: The American Society of Mechanical Engineers, New York, 29 West 39th Str., 1930.

Dr.-Ing. D. **THOMA**, o. Professor. Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München. Heft 4 mit 128 Abb. Verlag Oldenbourg, München und Berlin 1931. 104 S. Preis geh. 7,20 M.

Dr. W. **LIETZMANN**, Oberstudiendirektor in Göttingen, und Dr. J. **JAROSCH**, Direktor der Bundesrealschule in Wien XIII, Geometrie für die I. und II. Klasse. 3. Aufl. 108 S. mit 152 Abb. Verlag Franz Deuticke, Wien 1931. Preis 2,80 M.

Dr. J. **JAROSCH**, Direktor der Bundesrealschule in Wien XIII, und K. **PILIZOTTI**, Professor an der Bundesrealschule in Wien XIII, Darstellende Geometrie für die VII. und VIII. Klasse der Realschulen. 85 S. mit 119 Abb. Verlag Franz Deuticke, Wien 1931. Preis 3,20 M.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 8. Mai sprach Hr. Dr. H. Fromm (Berlin) in der Technischen Hochschule Charlottenburg über „Schwingungen in Automobillenkungen, Vorführung eines Schwingungszerlegers".

Am 19. Juni spricht Herr Prof. Dr. H. Reißner-Berlin über „Freie Flüssigkeitsstrahlen".

Im Juli wird Hr. Prof. Dr. G. Hamel über ein hydrodynamisches Problem sprechen.

Hauptversammlung.

Es wird nochmals auf die Jahresversammlung in Elster vom 13. bis 18. September aufmerksam

gemacht. Vortragsanmeldungen sind an den Geschäftsführer Prof. v. Mises oder an den Vorsitzenden, Prof. Prandtl-Göttingen, zu richten.

Jahrhundertfeier der Technischen Hochschule Hannover.

Die Technische Hochschule Hannover feiert jetzt ihr hundertjähriges Jubiläum. Aus diesem Anlaß finden in der Zeit vom 14. bis 16. Juni eine Reihe von Festlichkeiten statt. Neben einer Festschrift „100 Jahre Technische Hochschule Hannover", die von Rektor und Senat herausgegeben wird, erscheint ein vom Oberbibliothekar Dr. Trommsdorff verfaßtes Werk „Der Lehrkörper der Technischen Hochschule Hannover 1831—1931 (Catalogus Professorum)", das Lebensabrisse und Bildnisse aller Personen enthält, die dem Lehrkörper der Hochschule bisher angehört haben.

Persönliches.

Hr. Geh. Rat Prof. Dr. S. Finsterwalder an der Technischen Hochschule in München ist in den Ruhestand getreten.

Hr. Prof. Dr. Theodor v. Kármán feierte am 11. Mai seinen 50. Geburtstag. Aus diesem Anlaß überreichten ihm seine Freunde und Schüler das mit einer besonderen Widmung versehene Heft 10 der Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen.

Der Direktor des Heinrich-Hertz-Instituts für Schwingungsforschung in Berlin, Hr. Präsident a. D. Prof. Dr.-Ing. e. h. Dr. K. W. Wagner, ist zum Ehrenmitglied der American Academy of Arts and Sciences ernannt worden.

Am 3. Juni vollendete Hr. Geh. Rat Prof. Dr.-Ing. e. h. Ernst A. Brauer das 80. Lebensjahr. Er vertrat 1892 bis 1919 als Nachfolger von Grashof die theoretische Maschinenlehre an der Technischen Hochschule Karlsruhe und gehörte zu den letzten Persönlichkeiten, die noch auf dem Gesamtgebiet der Maschinentheorie in Forschung und Lehre tätig waren.

Die Leitung des Aerodynamischen Instituts an der Technischen Hochschule Aachen wurde Hrn. Prof. Dr. Wieselsberger, der früher in Göttingen, dann in Japan tätig war, übertragen.
185

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zur Konstruktion des Momentenvektors für die graphische Behandlung der Kinematik und Statik des Raumes. Im Heft 6 des Bds. 10 dieser Zeitschrift zeigt R. Beyer, daß man bei der Konstruktion des Momentenvektors für beliebigen Bezugspunkt unter Benützung des Abbildungsverfahrens von Mayor und Mises mit der einmaligen Anwendung der v. Misesschen Konstruktion auskommen kann, wenn die Abbildungsebene parallel zur Grundrißebene durch den Bezugspunkt gelegt wird. Damit wird in der Tat eine erfreuliche Vereinfachung meiner Konstruktionen für die räumliche Kinematik und Kinetostatik ermöglicht.

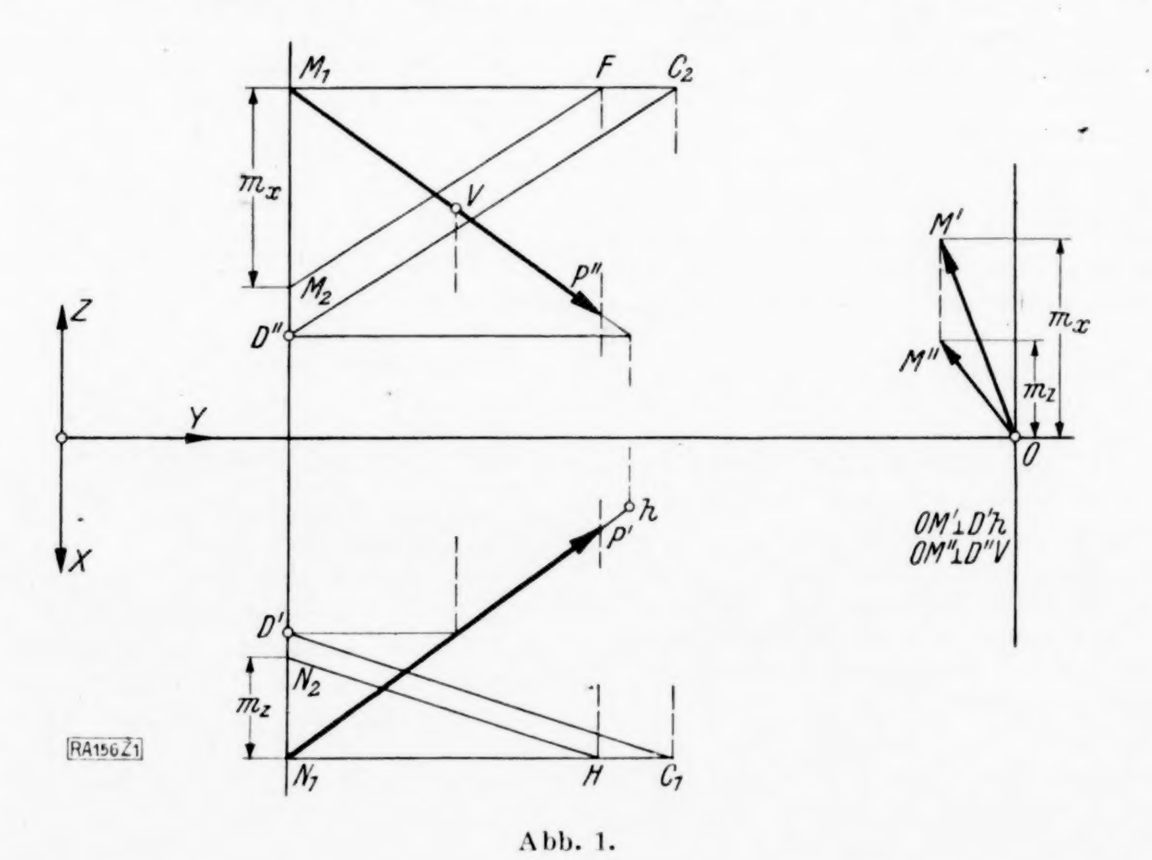


Abb. 1.

Was die zweite von R. Beyer angegebene, ohne Benützung dieser Abbildungsmethode gewonnene Darstellung des Momentenvektors anlangt, möchte ich dieser das folgende Verfahren (Abb. 1) zur Seite stellen, das ohne jeglichen Aufwand an analytischen Betrachtungen eine noch einfachere Konstruktion ermöglicht.

Bekanntlich sind die nach den X- und Z-Achsen genommenen Komponenten M_{DX}, M_{DZ} des Momentes der durch Grundriß P' und Aufriß P'' gegebenen Kraft $\mathfrak{P}$ in bezug auf den beliebigen Punkt D $(D'D'')$ gleich den doppelten Inhalten der durch $D''P''$ und $D'P'$ gebildeten Momentendreiecke. Durch Verlegung der Angriffspunkte von P'' und P' nach M_1 bzw. N_1 auf dem Projektionsstrahl $D'D''$ erhält man unmittelbar

$$M_{DX} = -\overline{D''M_1} \cdot Y = -c\, m_x$$

$$M_{DZ} = +\overline{D'N_1} \cdot Y = +c\, m_z\,,$$

wo

$$Y = \overline{M_1 F} = \overline{N_1 H}\,.$$

Macht man

$$M_1 C_2 = N_1 C_1 = c$$

als beliebig wählbare positive Strecke, so ist

$$m_x = \overline{M_1 M_2}$$
$$m_z = \overline{N_1 N_2},$$

wobei die Punkte M_2 und N_2 dadurch bestimmt sind, daß

$$M_2 F \parallel D'' C_2,$$
$$N_2 H \parallel D' C_1$$

gezogen wurde. Da der Momentenvektor senkrecht steht auf der durch D und $\mathfrak{P}$ gelegten Ebene, so ist sein Aufriß $O'' M'' \perp D'' v$, sein Grundriß $O' M' \perp D' h$, wo v und h die Spurpunkte von $\mathfrak{P}$ in der durch D'' bzw. D' gelegten Grundriß- bzw. Aufrißebene sind. Es genügt, einen dieser Spurpunkte zu verwenden; die Benützung des zweiten liefert dann eine Kontrolle der Konstruktion. Diese rein darstellend-geometrische Konstruktion besitzt nach meiner Meinung neben ihrer einfachen Herleitung und Durchführung den Vorzug größerer Anschaulichkeit.

Graz, im Jänner 1931.

Karl Federhofer. 156

Erwiderung zur Zuschrift des Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Federhofer betr. Mitteilung Beyer in Bd. 10, S. 618 bis 622.

Die von mir in dieser Zeitschrift angegebenen Konstruktionen waren selbstverständlich nur als vorläufige Mitteilung anzusehen, wie aus dem letzten Satz auf Seite 622 ersichtlich ist, wo bereits auf weitere Beziehungen, Kontrollen und Vereinfachungsmöglichkeiten hingewiesen wurde.

Am 18. Dezember 1930 habe ich dementsprechend Herrn Prof. Dr. v. Mises das folgende Manuskript:

„Graphische Behandlung der räumlichen Kinematik auf rein darstellendgeometrischer Grundlage"

eingesandt, in welchem u. a. auch die Bedingung $\mathfrak{M}''_D \perp D'' v$ an die Spitze der Untersuchungen und Anwendungen gestellt und dabei Vereinfachungen für die Zeichnung der Länge des Momentvektors gemäß $\mu' c = \varrho Z$ angegeben wurden. Als Beispiele dienten in diesem Manuskript: Die sphärische Bewegung, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhältnisse an sphärischen Kurbeltrieben (z. B. Taumelscheibentrieb), Geschwindigkeitsverhältnisse der allgemeinen Schraubenbewegung u. a. m.

Die Federhofersche Herleitung mit Hilfe der Projektionen des Vektordreiecks ist zweifellos elegant. Seine Konstruktion der Länge des Momentvektors ist eine von den verschiedenen Unterbringungsmöglichkeiten der vierten Proportionalen in der Figur und dürfte für manche Zwecke gewisse Vorteile bieten. Ich halte aber nach m. E. die meinem Dezember-Manuskript entnommene und in Abb. 1 dargestellte Lösung für einfacher und zweckmäßiger.

Man bestimmt die Punkte $g_{D1}(h)$ und $g_{D2}(v)$ in bekannter Weise, errichtet in D' und D'' die Lote zu $D' g_{D1}$ bzw. $D'' g_{D2}$, verbindet D' mit g_{D1} ($D' g_{D1} = \varrho$), macht $D' R = c$ und $D' S = Z$. Die durch g_{D1} zu $\overline{RS}$ gezogene Parallele trifft dann das in D' zu $D' g_{D1}$ errichtete Lot in M', wodurch $\overrightarrow{D' M'} = \mu'$ bzw. $\mathfrak{M}'_D = \mu' c$ gefunden wird. Heraufloten liefert sofort μ'' bzw. $\mathfrak{M}''_D$.

Meine weiteren Untersuchungen, die in den folgenden Manuskripten der Schriftleitung am 20. Januar 1931 eingereicht wurden:

„Neue Lösungen zu den Federhoferschen Grundaufgaben seiner ‚Graphischen Kinematik'",

„Graphische Ermittelung des Beschleunigungspoles der räumlichen Kinematik",

„Zur graphischen Kinematik des räumlichen Schubkurbeltriebs und der räumlich schwingenden Kurbelschleife",

„Zur graphischen Kinematik der eigentlichen Raumgetriebe"

haben gezeigt, daß den Konstruktionen der vierten Proportionalen ($\mu' c = \varrho Z$) im allgemeinen doch nicht die Bedeutung zukommt, wie man anfangs leicht anzunehmen geneigt ist. Man kann nämlich vielfach, insbesondere bei getrieblichen Anwendungen und auch bei verschiedenen theoretischen Aufgaben ohne die Zeichnung der vierten Proportionalen auskommen, indem man entweder die Strecke $D' g_{D1}$ direkt als Maß für μ' annimmt oder die Ähnlichkeitskonstruktion durch eine einfache Rechenschiebereinstellung ersetzt, die durch den zugrunde gelegten Maßstab bestimmt ist.

Die bis jetzt vorliegenden Ergebnisse dürften nach m. E. den Beweis dafür erbracht haben, daß die bisherige Scheu vor Anwendung rein darstellendgeometrischer Methoden in der räumlichen Kinematik und Statik unberechtigt war, daß es vielmehr wohl möglich ist, mit diesen einfachen Voraussetzungen ohne ein besonderes Abbildungs-

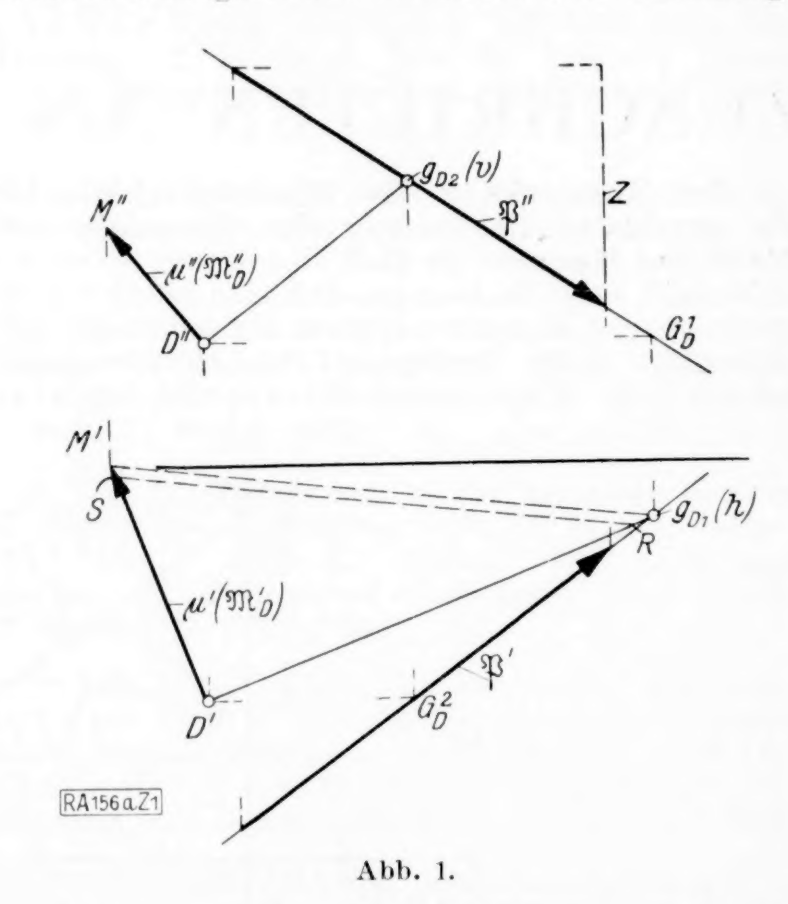


Abb. 1.

verfahren auszukommen. Die Figuren werden dabei linienärmer, und die dazugehörigen Hilfslinien lassen sich auf dem Reißbrett als horizontale und vertikale Linien leicht ziehen. Auf- und Grundriß entstehen gleichzeitig; die Überlastung eines Risses wird durch gleichmäßige Verteilung der Hilfslinien auf beide Risse vermieden, wodurch größere Anschaulichkeit erreicht wird. Den zahlreichen Federhoferschen Forschungsarbeiten, die in verdienstvoller Weise das Interesse für die graphische Behandlung der räumlichen Kinematik geweckt haben, ist somit nach meinem Ermessen ein Verfahren zur Seite gestellt worden, das sich wegen seiner elementaren Grundlagen, insbesondere für den Ingenieur, zum Lösen getriebetechnischer Aufgaben eignet. Über den Inhalt der obigen fünf Manuskripte soll demnächst auszugsweise in dieser Zeitschrift berichtet werden.

Zwickau, den 28. Januar 1931.

R. Beyer. 156a

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — Copyright 1931 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.